Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Análisis Funcional–Curso 2023

Práctico 2

1. Se dice que un subconjunto D de un espacio vectorial topológico X es un *disco*, o que es absolutamente convexo, si $aD + bD \subseteq D$, $\forall a, b \in \mathbb{F}$ tales que $|a| + |b| \leq 1$. Mostrar que D es un disco si y sólo si D es convexo y equilibrado.

2. Si $E \neq \emptyset$ es un subconjunto del espacio vectorial X, su *cápsula o envolvente balanceada* E_b es la intersección de todos los conjuntos balanceados de X que contienen a E.

   a) Probar que $E_b = \cup_{|\alpha| \leq 1} \alpha E$.

   b) Definir y describir la cápsula convexa y balanceada E_{cb} de E (sugerencia para la descripción: tener en cuenta la parte anterior y el Ejercicio 3 del Práctico 1).

   c) Sea $E := \{(0,0), (0,1), (1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Hallar E_c, E_b, E_{cb}, $(E_c)_b$ y $(E_b)_c$ (aquí A_c indica la envolvente convexa de A).

3. Sea X un espacio vectorial topológico de Hausdorff. Probar que ningún subespacio no nulo de X es acotado.

4. Dado un conjunto no vacío S, se considera en el $\mathbb{C}$-espacio vectorial $X := \{f : S \to \mathbb{C}\}$. Para cada $s \in S$, sea $p_s : S \to [0, \infty)$ tal que $p_s(f) := |f(s)|$. Probar que cada p_s es una seminorma en X, y que la convergencia en la topología definida por $\mathcal{P} := \{p_s : s \in S\}$ en X es la convergencia punto a punto. Mostrar que X contiene abiertos acotados no vacíos si y sólo si S es finito. Hallar condiciones en S que sean equivalentes a la metrizabilidad y a la normabilidad de X.

5. Sean $(X_i)_{i \in I}$ una familia de espacios vectoriales topológicos, y $X = \prod_{i \in I} X_i$ con la topología producto y las operaciones de suma y producto por escalares definidas punto a punto. Probar que X es un espacio vectorial topológico con esta estructura, y que X es localmente convexo si y sólo si cada X_i lo es.

6. Sean $\mathcal{P} := \{p_n\}_{n \geq 1}$ una familia separante de seminormas en X, $\tau_{\mathcal{P}}$ la topología definida por $\mathcal{P}$, y $d : X \times X \to [0, \infty)$ dada por $d(x, y) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}$, $\forall x, y \in X$. Probar que d es una métrica en X, y que $\tau_{\mathcal{P}} = \tau_d$, donde τ_d es la topología definida por d en X.

7. Para $0 < p < 1$, sea $\ell^p := \left\{ x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{F} / \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\}$.

   a) Mostrar que ℓ^p es un espacio vectorial.

   b) Probar que $d : \ell^p \times \ell^p \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n) - y(n)|^p$ es una métrica invariante sobre ℓ^p, con la cual ℓ^p es un F–espacio.

   c) Demostrar que ℓ^p es localmente acotado.

   d) Probar que ℓ^p no es localmente convexo, y por lo tanto no es de Fréchet.