Apunte teórico
Teorema de Conley[1]

Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo de un espacio métrico compacto.

Vamos a denotar $x \dashv_\varepsilon y$ para indicar que existe una *ε-pseudo-órbita* de x a y, es decir, existe un conjunto ordenado $\{x_i\}_{i=0}^k$ de al menos dos puntos (i.e. $k \geq 1$) tales que $x = x_0$, $x_k = y$ que verifican para $0 \leq i < k$:

$$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon. \tag{1}$$

Notaremos $x \dashv y$ si para todo $\varepsilon > 0$ se cumple que $x \dashv_\varepsilon y$.

El conjunto *recurrente por cadenas* es el conjunto $\mathcal{R}(f) = \{x \in X \ : \ x \dashv y\}$. Es un conjunto compacto y f-invariante (esto es un ejercicio del práctico) e independiente de la métrica (esto también es un ejercicio). En $\mathcal{R}(f)$ definimos una relación de equivalencia $x \sim y$ si $x \dashv y$ y $y \dashv x$. (En el práctico se pide mostrar que esto representa efectivamente una relación de equivalencia en $\mathcal{R}(f)$.) Las clases de equivalencia se llaman *clases de recurrencia por cadenas.*

Consideramos $U \subset X$ un abierto tal que $f(\overline{U}) \subset U$. Un tal abierto se llama un *abierto atractor*. Podemos definir $A_U = \bigcap_{n>0} f^n(\overline{U})$ y $R_U = \bigcap_{n<0} f^n(X \setminus U)$ el *atractor* y *repulsor* asociados a U. Notar que si $U = M$ entonces $A_U = X$ y $R_U = \emptyset$ mientras que si $U = \emptyset$ entonces $A_U = \emptyset$ y $R_U = X$.

Se cumple:

Lema 0.1. *Existe $h := h_U : X \to [0,1]$ una función continua tal que $h|_{R_U} = 1$, $h|_{A_U} = 0$ y tal que si $x \notin A_U \cup R_U$ entonces $h(f(x)) < h(x)$.*

Demostración. Consideramos una función $\psi : X \to [0,1]$ cualquiera tal que $\psi|_{R_U} = 1$ y $\psi|_{A_U} = 0$. Por ejemplo, tomar $\psi(x) = \frac{d(x,A_U)}{d(x,A_U)+d(x,R_U)}$ que es fácil chequear verifica esas propiedades debido a que A_U y R_U son compactos disjuntos (notar que si $U = \emptyset, X$ entonces el resultado se verifica inmediatamente tomando $h_U = \psi$ así definida).

Ahora, vamos a construir la función h en dos etapas. Primero construimos una función $h_0 : X \to [0,1]$ continua que sea 'no creciente' en las órbitas, y luego la haremos decreciente en los puntos fuera de $A_U \cup R_U$.

Definimos:

$$h_0(x) = \sup_{i \geq 0}\{\psi(f^i(x))\}. \tag{2}$$

Notar que $(h_0)|_{R_U} = 1$ y que $(h_0)|_{A_U} = 0$, claramente toma valores en $[0,1]$ y se cumple que $h_0(f(x)) \leq h_0(x)$ para todo $x \in X$ por definición. Para ver que h_0 es continua, notar que si

[1]Notas informales y no revisadas escritas por Rafael Potrie, usar con cuidado. Comentarios a rpotrie@cmat.edu.uy

$x \notin A_U \cup R_U$ (donde la función es claramente continua) entonces se cumple que $\psi(f^n(x)) \to 0$ cuando $n \to +\infty$ y por lo tanto el valor del supremo es un máximo y eso muestra la continuidad en x.

Ahora, consideramos

$$h(x) = \sum_{i \geq 1} \frac{h_0(f^i(x))}{2^i}. \tag{3}$$

Tenemos que $h|_{R_U} = 1$ y que $h|_{A_U} = 0$ es continua (la suma converge uniformemente) y toma valores en $[0,1]$. Ahora, para todo $x \in X$ se cumple que:

$$h(f(x)) = \sum_{i \geq 1} \frac{h_0(f^{i+1}(x))}{2^i} \leq \sum_{i \geq 1} \frac{h_0(f^i(x))}{2^i} = h(x).$$

Además, la igualdad implica que todos los términos de la suma son iguales, lo cual implica que $x \in A_U \cup R_U$ probando lo deseado.

□

Ejercicio 1. *El objetivo de este ejercicio es dar 'otra' demostración del Lema 0.1 construyendo una función ligeramente diferente.*

1. *Construir $\hat{\psi} : X \to [0,1]$ continua de forma tal que $\hat{\psi}|_{f(\overline{U})} = 0$ y $\hat{\psi}|_{X \setminus U} = 1$.*
2. *Mostrar que para cada $x \in X \setminus A_U \cup R_U$ existe un único $j(x) \in \mathbb{Z}$ de forma tal que $x \in U \setminus f(\overline{U})$ y cumple que $j(f(x)) = j(x) - 1$.*
3. *Mostrar que la función $h : X \to [0,1]$ definida por $h|_{A_U} = 0$, $h|_{R_U} = 1$ y para $x \notin A_U \cup R_U$ por*[2]

$$h(x) = \frac{1}{2} + \frac{\left(\psi(f^{j(x)}(x)) - \frac{1}{2}\right)}{2^{1+|j(x)|}} + \frac{j(x)}{2|j(x)|}\left(1 - 2^{-|j(x)|}\right) \tag{4}$$

   es continua y cumple lo que se busca en el Lema 0.1.

La función que acabamos de construir permite probar lo siguiente[3]:

Lema 0.2. *Sea U un abierto atractor, entonces $\mathcal{R}(f) \subset A_U \cup R_U$.*

Demostración. Usamos la función h definida en el lema anterior. Notar que si $x \notin A_U \cup R_U$ tenemos que $h(f(x)) < h(x) = a$. Sea $C_a = \{y \in X \;:\; h(y) \leq a\}$ y consideramos $b = \max_{y \in C_a} h(y) < a$. Podemos considerar por la continuidad uniforme de h un valor $\varepsilon > 0$ pequeño de forma tal que si $d(y, y') < \varepsilon$ entonces $|h(y) - h(y')| < \frac{a-b}{2}$.

Supongamos ahora que $x = x_0, x_1, \ldots, x_k$ es una ε-pseudo órbita. Afirmamos que $h(x_j) < a$ para todo $j \geq 1$, por lo tanto, $x_k \neq x$ y x no puede ser recurrente por cadenas. Para ver esto, alcanza notar por inducción que dado que $f(x_i)$ cumple que $h(f(x_i)) \leq b$ tenemos que $h(x_{i+1}) < b + \frac{a-b}{2} < a$. □

[2] Considerar $0/0 = 1$.

[3] De hecho, no es necesaria la función para mostrar esto, y puede ser un buen ejercicio hacerlo.

Para un punto $x \in X$ vamos a definir $P_\varepsilon^+(x) = \{z \in X \ : \ x \dashv_\varepsilon z\}$. Se cumple que

Proposición 0.3. *Para todo $x \in X$ se cumple que $P_\varepsilon^+(x)$ es abierto no vacío y se verifica que $f(\overline{P_\varepsilon^+(x)}) \subset P_\varepsilon^+(x)$.*

Demostración. Sea $z \in P_\varepsilon^+(x)$ y sea $x = x_0, \dots, x_k = z$ una ε-pseudo-órbita de x a z. Notar que $d(f(x_{k-1}), z) < \varepsilon$, entonces, existe $\delta > 0$ tal que si $d(z, w) < \delta$ entonces tenemos que $d(f(x_{k-1}), w) < \varepsilon$. Por lo tanto, si $d(w, z) < \delta$ la sucesión $x = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, \hat{x}_k = w$ es una ε-pseudo-órbita de x a w y se tiene que $x \dashv_\varepsilon w$. Esto muestra que $P_\varepsilon^+(x)$ es abierto. Que es no vacío es pues incluye a los puntos z a distancia menor de ε de $f(x)$ (en particular, a $f(x)$).

Ahora, sea $z \in X$ tal que $f^{-1}(z) \in \overline{P_\varepsilon^+(x)}$. Entonces, consideramos $\delta > 0$ tal que $d(y, y') < \delta$ implica $d(f(y), f(y')) < \varepsilon$ y si consideramos un punto $w \in P_\varepsilon^+(x)$ tal que $d(w, f^{-1}(z)) < \delta$ podemos tomar una ε-pseudo-órbita $x = x_0, x_1, \dots, x_k = w$. Tendremos que $x = x_0, \underline{x_1, \dots,} x_k, x_{k+1} = z$ es una ε-pseudo-órbita lo cual muestra que $z \in P_\varepsilon^+(x)$. Esto demuestra que $f(\overline{P_\varepsilon^+(x)}) \subset P_\varepsilon^+(x)$.

□

Notar que podra ser el caso que $P_\varepsilon^+(x) = X$. Para eso, vamos a ver lo siguiente:

Proposición 0.4. *Si $x \notin \mathcal{R}(f)$ entonces tenemos que $P_\varepsilon^+(x) \neq X$.*

Demostración. Supongamos que $P_\varepsilon^+(x) = X$ para todo $\varepsilon > 0$. Entonces, en particular, vemos que $x \in P_\varepsilon^+(x)$ para todo $\varepsilon > 0$ y por lo tanto $x \in \mathcal{R}(f)$.

□

Ahora estamos en condiciones de demostrar:

Teorema 0.5 (Conley, o 'Teorema fundamental de los sistemas dinámicos')**.** *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo de un espacio métrico compacto, entonces, existe $h : X \to [0, 1]$ continua con las propiedades siguientes:*

1. *$h(f(x)) \leq h(x)$ y la igualdad implica que $x \in \mathcal{R}(f)$,*
2. *si $x, y \in \mathcal{R}(f)$ y se cumple que $h(x) = h(y)$ entonces están en la misma clase de recurrencia por cadenas,*
3. *la imágen de $\mathcal{R}(f)$ por h es un cerrado con interior vacío.*

Demostración. Consideramos $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una base numerable de entornos (es decir, para todo U abierto, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset U$).

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de uniones finitas de abiertos de $\mathcal{B}$ (también numerable) y consideramos $\mathcal{C}$ el conjunto de abiertos de $U \in \mathcal{A}$ de forma tal que se cumple que $f(\overline{U}) \subset U$ y tales que $U \neq \emptyset, X$. Tenemos que $\mathcal{C}$ es un conjunto numerable.

Si $V \subset X$ es cualquier abierto tal que $f(\overline{V}) \subset V$, entonces, existe $U \in \mathcal{C}$ tal que $A_U = A_V$ y $R_U = R_V$. Esto es pues podemos considerar U como un cubrimiento (finito) por abiertos de $\mathcal{B}$ contenidos en V de $f(\overline{V})$ (que es compacto), por lo tanto, tenemos que $f(\overline{V}) \subset U \subset V$ y eso alcanza para ver que $A_U = A_V$ y $R_U = R_V$.

Notar que si $\mathcal{C}$ es vacío es porque no hay abiertos atractores que no sean vacíos o todo X, pero eso implica que todo punto es recurrente por cadenas por la Proposición 0.4 y en ese caso el teorema se verifica trivialmente considerando h una función constante. Consideramos, entonces $\mathcal{C} = \{U_i\}_{i\in I}$ con $I \subset \mathbb{Z}_{>0}$ numerable, no vacío y para cada $i \in I$ tomamos la función continua $h_i : X \to [0,1]$ dada por el Lema 0.1.

Definimos $h : X \to [0,1]$ continua como:

$$h(x) = 2\sum_{i\in I} \frac{h_i(x)}{3^i} \tag{5}$$

Notar que $h(f(x)) \leq h(x)$ pues cada sumando es menor o igual, y de hecho, por la Proposición 0.4 sabemos que si $x \notin \mathcal{R}(f)$ entonces $h(f(x)) < h(x)$. Esto prueba (1).

Notar que por el Lema 0.2, si $x \in \mathcal{R}(f)$ entonces se cumple que para todo $U \in \mathcal{C}$ tenemos que $x \in A_U \cup R_U$. Eso dice que $h(x)$ es una suma de la forma $\sum_{j\in J} \frac{2}{3^j}$ con $J \subset I$, y por lo tanto pertenece al conjunto de Cantor usual. Esto muestra que $h(\mathcal{R}(f))$ está contenido en dicho conjunto que es cerrado con interior vacío. El punto (3) del Teorema sigue de que $\mathcal{R}(f)$ es compacto y por lo tanto su imagen también es compacta y está contenida en un conjunto con interior vacío.

Finalmente, supongamos que $x, y \in \mathcal{R}(f)$ cumplen que $h(x) = h(y)$ y por lo tanto se cumple que para todo $i \in I$ tenemos que $h_i(x) = h_i(y) \in \{0,1\}$. Mostremos que esto implica que $y \in P_\varepsilon^+(x)$ para todo $\varepsilon > 0$. De hecho, dado que $x \in \mathcal{R}(f)$ sabemos que $x \in P_\varepsilon^+(x)$ que es un abierto atractor (cf. Proposición 0.3) y el Lema 0.2 nos dice que $x \in A_{P_\varepsilon^+(x)}$, lo cual dice que $y \in P_\varepsilon^+(x)$ también pues $h_i(x) = h_i(y)$ para todo i y esto muestra que $x \dashv y$. Un argumento simétrico dice que $y \dashv x$ y concluimos la prueba de (2).

$\square$

Una función h cumpliendo las condiciones del teorema se llama *función de Lyapunov* o *función de Conley* para f.

Queda como ejercicio lo siguiente para que puedan entrenar lo visto:

Ejercicio 2. *Decimos que una clase de recurrencia por cadenas Q es un* quasi-atractor *si se cumple que existe una familia U_n de abiertos atractores (recordar, tales que $f(\overline{U_n}) \subset U_n$ tales que $Q = \bigcap_n U_n$.*

- *Mostrar que todo sistema dinámico tiene un atractor.*
- *Decimos que una clase de recurrencia por cadenas A es un* atractor[4] *si es un quasi-atractor y es aislado en $\mathcal{R}(f)$ (es decir, existe un abierto V en X tal que $\mathcal{R}(f) \cap V = A$). Mostrar que en este caso existe U un abierto atractor tal que $A = \bigcap_{n>0} f^n(U)$.*
- *Mostrar que hay sistemas dinámicos sin atractores.*

[4]No confundir con el atractor asociado a un abierto atractor U. Si bien el ejercicio pide mostrar que si A es un atractor en este sentido entonces es el atractor asociado a un abierto, estamos adicionalmente pidiendo que sea recurrente por cadenas, cosa que no tiene porque ser cierta para un atractor asociado a un abierto atractor cualquiera.

- *Mostrar que dado un quasi-atractor Q se puede construir una función de Lyapunov que tiene su mínimo en Q.*