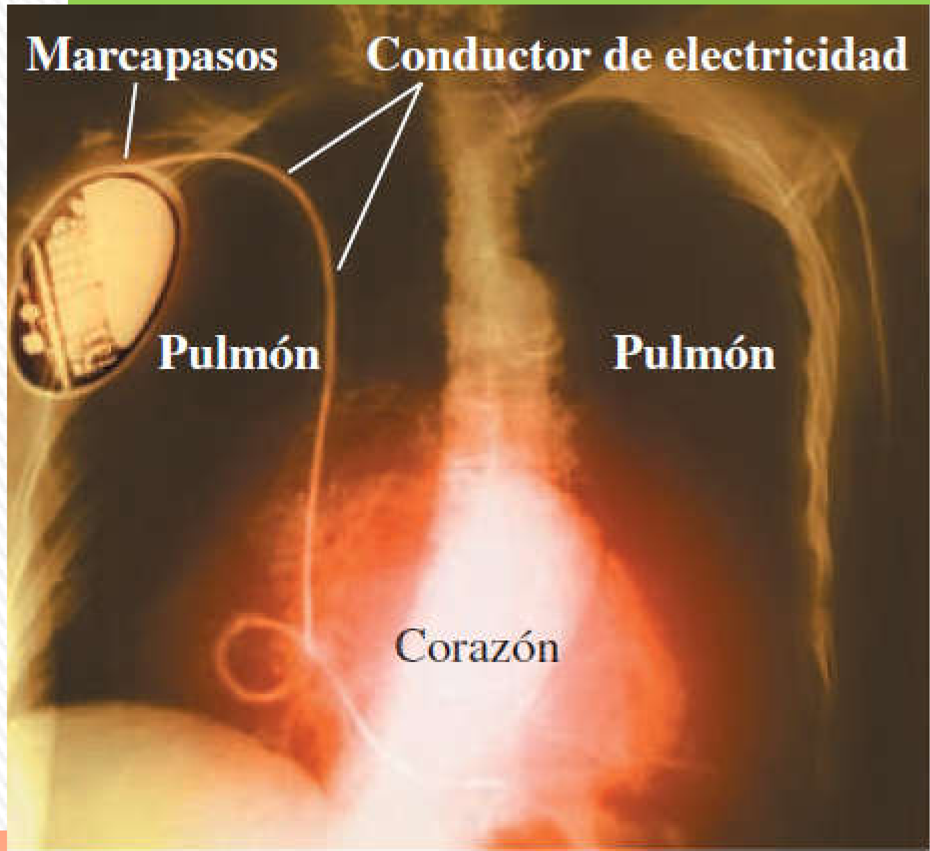
2.4- CIRCUITOS RC



Marcapasos y capacitores La radiografía muestra un marcapasos implantado en un paciente con problemas en el nódulo sinoatrial, la parte del corazón que genera la señal eléctrica que provoca los latidos del corazón.
El circuito del marcapasos contiene una batería, un capacitor y un interruptor controlado por computadora.
Para mantener los latidos regulares, el interruptor descarga el capacitor una vez por segundo y envía un pulso eléctrico al corazón. Luego, el interruptor se abre para permitir la recarga del capacitor para el siguiente pulso.

CIRCUITOS RC

En los circuitos en que las fem y las resistencias son ***constantes*** (no varían con el tiempo), los potenciales, corrientes y potencias también son independientes del tiempo.

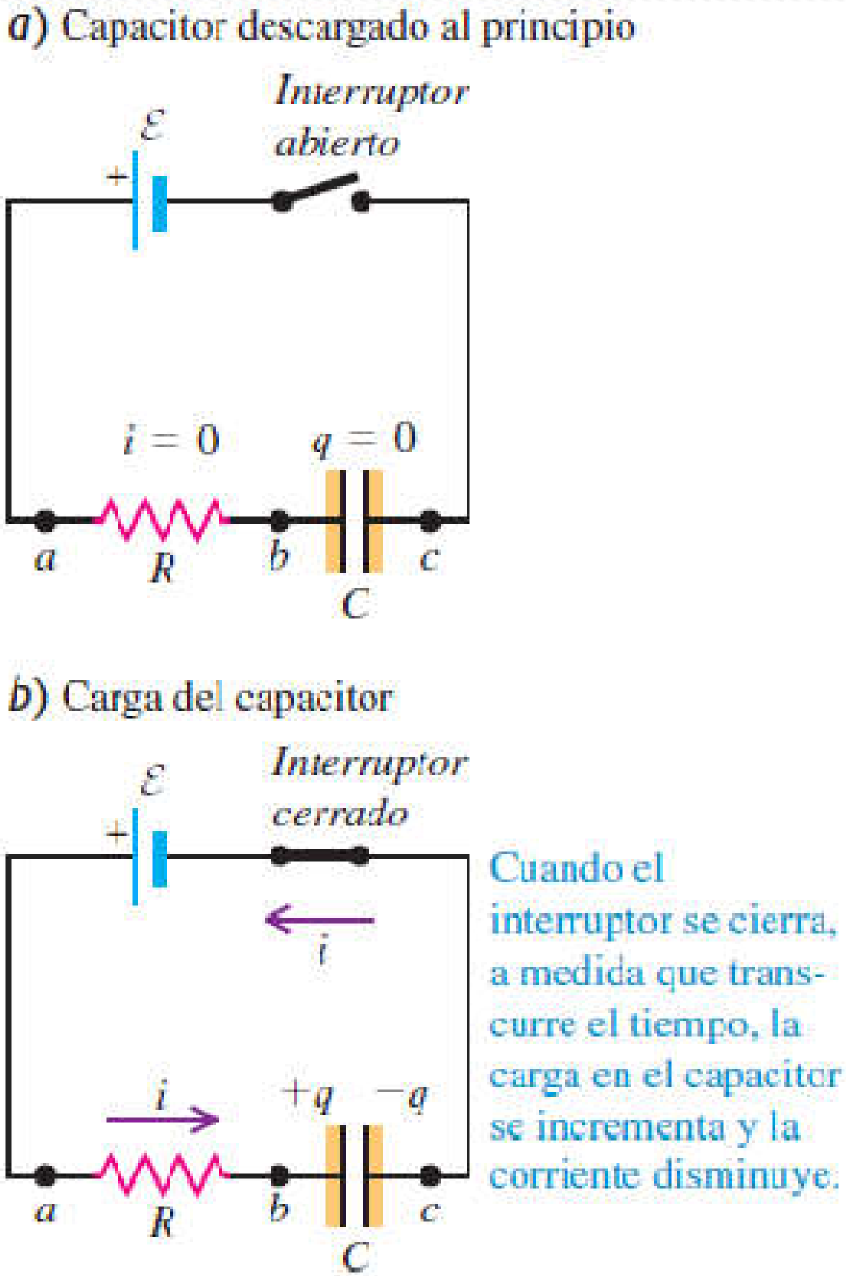
Pero en la carga o descarga de un capacitor se tiene una situación en la que las corrientes, los voltajes y las potencias **cambian con el tiempo**.

Muchos dispositivos incorporan circuitos en los que un capacitor se carga y descarga consecutivamente: semáforos intermitentes, luces de emergencia de los automóviles y unidades de flash electrónico, marcapasos…

Realizaremos algunos desarrollos matemáticos: planteamiento de una ecuación diferencial para un circuito RC y la resolveremos, con carácter demostrativo. El uso de estos métodos matemáticos no serán requeridos en las evaluaciones.

CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

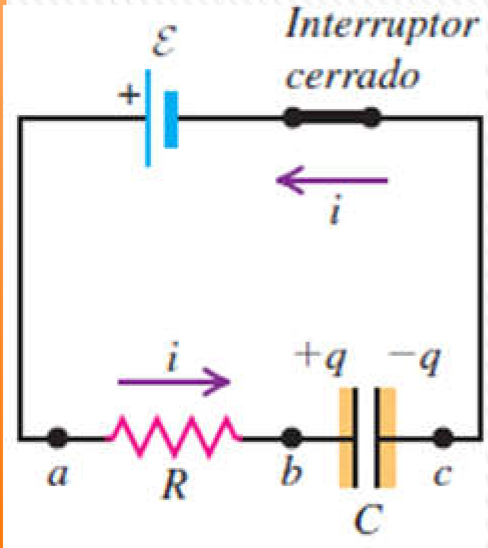
Circuito con resistor y capacitor en serie: **circuito *R-C*.**
Batería ideal de fem $\mathcal{E}$ constante (r =0) y se desprecia la resistencia de todos los conductores de conexión, salvo el resistor *R*.
Inicialmente capacitor descargado, en t = 0, cierro el interruptor.
Circula la corriente alrededor y comienza a cargar el capacitor.



Como el capacitor en t = 0 está descargado, la diferencia de potencial $v_{bc}=0$, y el voltaje v_{ab} a través del resistor R es igual a la fem $\mathcal{E}$; y la corriente inicial a través del resistor, $I_0 = v_{ab}/R = \mathcal{E}/R$.

Es decir que en t = 0 el capacitor se comporta como un cable (conductor perfecto).

CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor



A medida que el capacitor se carga, su voltaje v_{bc} aumenta, mientras que el voltaje del resistor v_{ab}, disminuye, cumpliéndose que: $\mathcal{E} = v_{ab} + v_{bc}$.

Sea q la carga del capacitor e i la corriente del circuito, en un instante mientras se carga el capacitor.

Luego de un cierto tiempo, el capacitor se termina de cargar, $i = 0$, por lo que $v_{ab} = i.R = 0$, y $v_{bc} = \mathcal{E}$.

Sea q la carga del capacitor e i la corriente del circuito.

Las diferencias de potencial instantáneas valen:

$v_{ab} = i.R$ y $v_{bc} = q/C$.

Con la regla de Kirchhoff de las mallas, se obtiene

$$\mathcal{E} - i.R - \frac{q}{C} = 0$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

En $t = 0$ (interruptor cerrado), capacitor descargado: $q = 0$, por lo que la corriente *inicial* vale $I_0 = \mathcal{E}/R$.

A medida que la q *aumenta*, q/RC *crece* y la carga del capacitor q tiende a su valor final (Q_f), la corriente i disminuye y finalmente se vuelve cero. Cuando $i = 0$:

$$Q_f = \mathcal{E}C$$ no depende de R

CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

Vamos a resolver esta ecuación diferencial

Como: $i = \frac{dq}{dt}$ se tiene que: $\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{1}{RC}(q - C\mathcal{E})$ $\qquad \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{RC}$

Para integrar ambos miembros cambio las variables de integración a *q' y t'* y uso *q y t para los límites superiores, los límites inferiores son q = 0 y t = 0:*

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - \mathcal{E}C} = -\int_0^t \frac{1}{RC}\,dt' = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt' \qquad \ln(q' - \mathcal{E}C)\Big|_0^q = -\frac{t'}{RC}\Big|_0^t$$

$$\ln\left(\frac{q - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C}\right) = -\frac{t}{RC} \quad \Rightarrow \quad \frac{q - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C} = e^{-\frac{t}{RC}} \qquad q - \mathcal{E}C = -\mathcal{E}Ce^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q = \mathcal{E}C - \mathcal{E}Ce^{\frac{t}{RC}}$$

$$q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Circuito *R-C*, con capacitor cargándose:

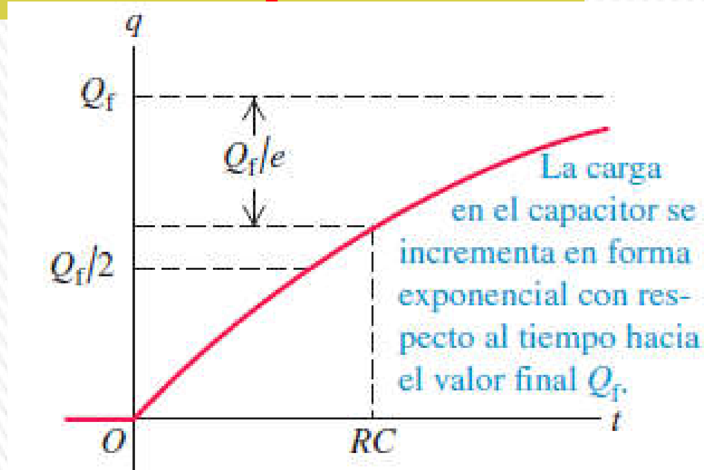
Carga del capacitor · Capacitancia · Carga final del capacitor $= C\mathcal{E}$

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/RC})$$

fem de la batería · Tiempo transcurrido desde el cierre del interruptor · Resistencia

CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

$$q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$



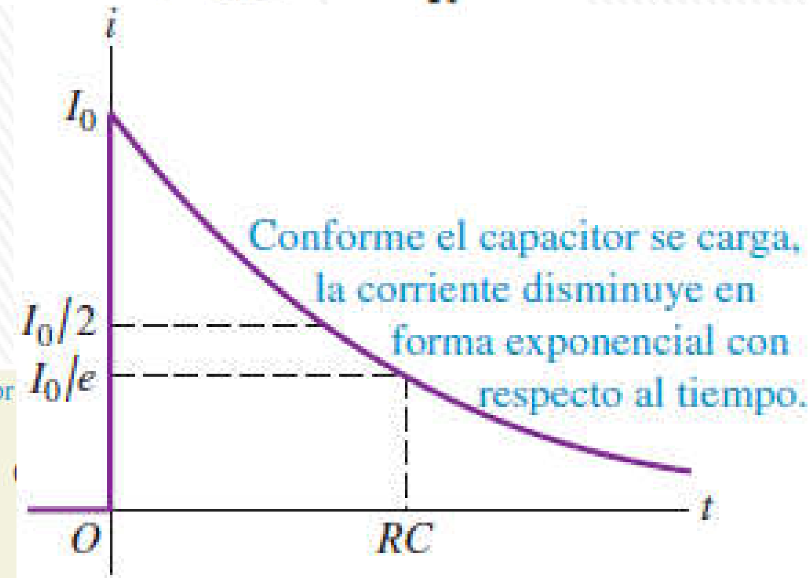
La carga del capacitor comienza en cero y poco a poco se acerca al valor final $Q_f = C\mathcal{E}$.

La corriente instantánea *i es la derivada con respecto al tiempo:*

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right) = \mathcal{E}C\left(-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Cuando el interruptor se cierra (t = 0), la corriente pasa de cero a su valor inicial $I_0 = \mathcal{E}/R$; después de eso, tiende gradualmente a cero.



Circuito *R-C*, capacitor que se carga:

Corriente · fem de la batería · Tiempo transcurrido desde el cierre del interruptor

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}$$

Corriente inicial $= \mathcal{E}/R$

Tasa de cambio de la carga del capacitor · Resistencia · Capacitancia

CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

Constante de tiempo - Después de un tiempo igual a *RC* *(t=RC):*

$$i(t=RC) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{RC}{RC}} = I_0 e^{-1} = I_0 \frac{1}{e}$$

$$q(t=RC) = Q_f\left(1 - e^{-\frac{RC}{RC}}\right) = Q_f(1 - e^{-1}) = Q_f\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

la corriente ha disminuido a 1/e (alrededor de 0,368) de su valor inicial, y la carga del capacitor ha alcanzado (1 – 1/*e) = 0,632 de su valor final* $Q_f = C\mathcal{E}$.
Por lo tanto, el producto RC es una medida de la rapidez con que se carga el capacitor.
El término *RC recibe el nombre* de **constante de tiempo, o tiempo de relajación,** del circuito, y se denota con **τ:**

$$\tau = RC$$

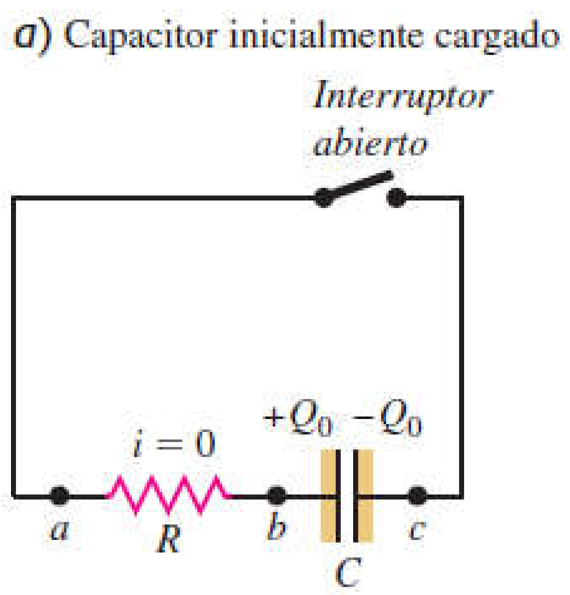
Cuando τ es pequeña, el capacitor se carga con rapidez; cuando es grande, el proceso de carga toma más tiempo.
Si la resistencia es pequeña, es fácil que fluya la corriente y el capacitor se carga rápido.
Si *R está en ohms y C en farads, τ está en segundos.*

En un intervalo de tiempo 2τ la corriente desciende a $i(2\tau) = I_0 e^{-2} = 0{,}135 I_0$;
en 3τ: $i(3\tau) = I_0 e^{-3} = 0{,}0498 I_0$
en 10τ: $i(10\tau) = I_0 e^{-10} = 4{,}54\times10^{-5} I_0$

CIRCUITOS RC – Descarga de un capacitor

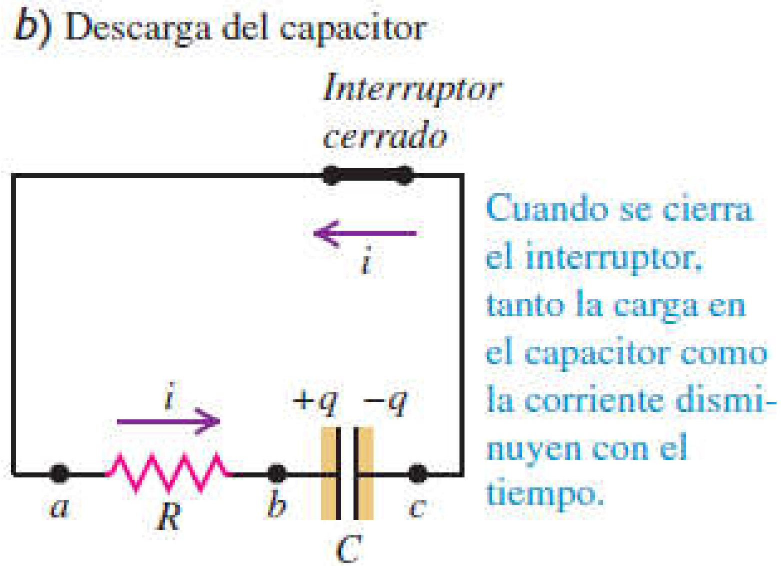
Ahora tengo el capacitor con *una* carga Q_0, *y retiro la batería.*
Cuando cierro el interruptor, supongo que t = 0.
q = Q_0.
El capacitor se descarga a través del resistor y su carga disminuye finalmente a cero.
La regla de Kirchhoff de las mallas da la ecuación anterior pero con $\mathcal{E} = 0$:

$$0 - iR - \frac{q}{C} = 0 \qquad i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$$



La corriente *i ahora es negativa:*
la carga positiva q ahora sale de la placa izquierda del capacitor, *por lo que la corriente va en* sentido opuesto al que se ilustra en la figura.

En *t = 0, q =*Q_0, corriente inicial es $I_0 = -Q_0/RC$.



CIRCUITOS RC – Descarga de un capacitor

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$$

Para obtener *q como función del tiempo se reordena la ecuación , de nuevo* se cambian los nombres de las variables a *q y t, y se procede a integrar, los límites para q' son ahora de* Q_0 *a q.*

$$\int_{Q_0}^{q} \frac{dq'}{q'} = \frac{1}{RC}\int_{0}^{t} dt' \qquad \ln\frac{q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$\boxed{q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$$

La corriente instantánea *i es la derivada de esta con respecto al tiempo:*

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}\left(-\frac{1}{\mathrm{RC}}\right) = -\frac{\mathcal{E}C}{\mathrm{RC}} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = -\frac{\mathcal{E}}{\mathrm{R}} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{Q_0}{\mathrm{RC}} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\boxed{i(t) = -\mathrm{I}_0 e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{Q_0}{\mathrm{RC}} e^{-\frac{t}{RC}}}$$

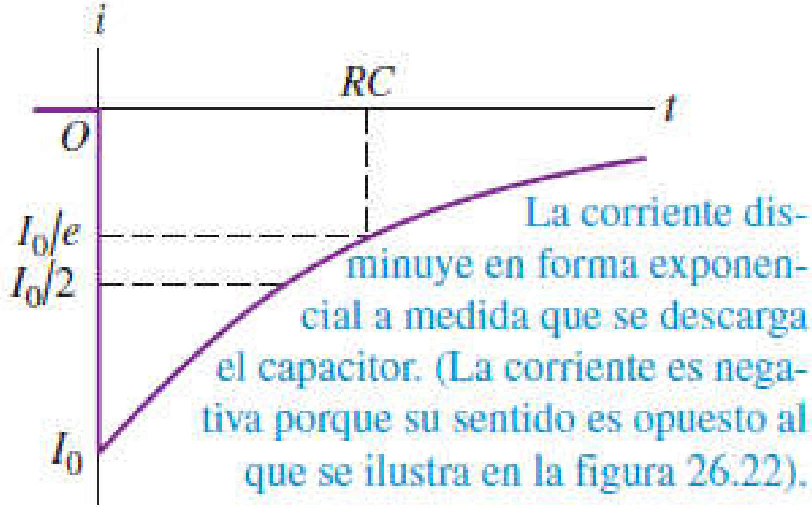
CIRCUITOS RC – Descarga de un capacitor

Gráficas de la corriente y la carga; ambas cantidades tienden a cero en forma exponencial con respecto al tiempo.

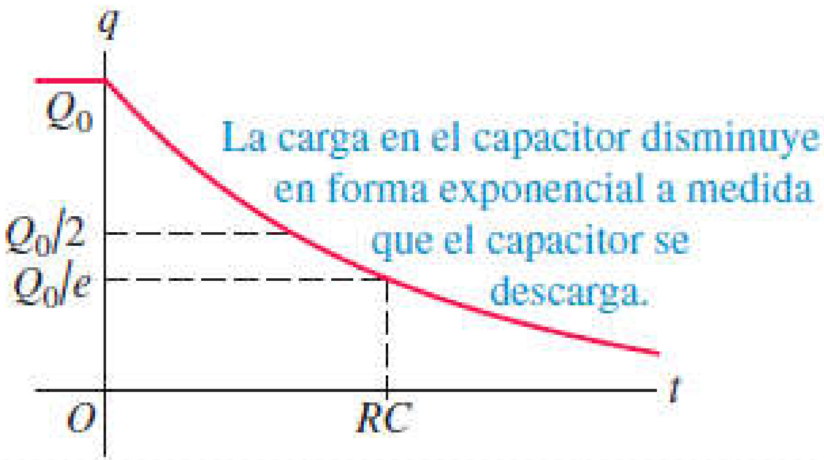
Mientras el capacitor se carga, la tasa instantánea a la que la batería entrega energía al circuito (potencia) es $P = \mathcal{E}i$. *La tasa instantánea a la que la energía* eléctrica se disipa en el resistor es i^2R, *y la tasa a la que la energía se almacena en el* capacitor es $iv_{bc} = iq/C$:

$$\mathcal{E}i = i^2R + \frac{iq}{C}$$

a) Gráfica de la corriente contra el tiempo para un capacitor en descarga



b) Gráfica de la carga del capacitor contra el tiempo para un capacitor en descarga



CIRCUITO RC BALANCE ENERGÍA

Mientras el capacitor se carga, la tasa instantánea a la que la batería entrega energía al circuito es $P = \mathcal{E}i$.
La tasa instantánea a la que la energía eléctrica se disipa en el resistor es i^2R, *y la tasa a la que la energía se almacena en el* capacitor es $iv_{bc} = iq/C$:

$$\mathcal{E}i = i^2R + \frac{iq}{C}$$

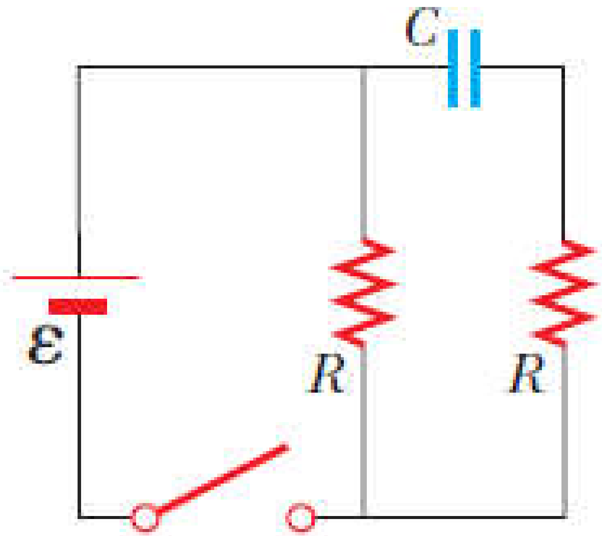
Esto significa que de la potencia *suministrada por la batería, una parte se disipa* en el resistor y otra parte *se almacena en el capacitor.*

Energía *total suministrada por la batería durante la carga del capacitor:*
igual a la fem $\mathcal{E}$ de la batería multiplicada por el total de la carga Q_f, o $\mathcal{E}.Q_f$
La energía total almacenada en el capacitor es $Q_f \mathcal{E}/2$.
Así, exactamente la mitad de la energía suministrada por la batería se almacena en el capacitor, y la otra mitad se disipa en el resistor.
Esta división a la mitad de la energía no depende de C, R o $\mathcal{E}$.

Estos resultados se pueden verificar en detalle tomando la integral con respecto al tiempo de cada una de las cantidades de potencia.

PREGUNTA RÁPIDA (QUICK QUIZ)

Considere el circuito de la figura y suponga que la batería no tiene resistencia interna.



i) **Justo después de cerrar el interruptor, ¿cuál es la corriente** en la batería?

a) 0,

b) $\mathcal{E}/2R$,

c) $2\mathcal{E}/R$,

d) $\mathcal{E}/R$,

e) imposible de determinar.

ii) Después de **un tiempo muy largo**, ¿cuál es la corriente en la batería? Elija entre las mismas opciones

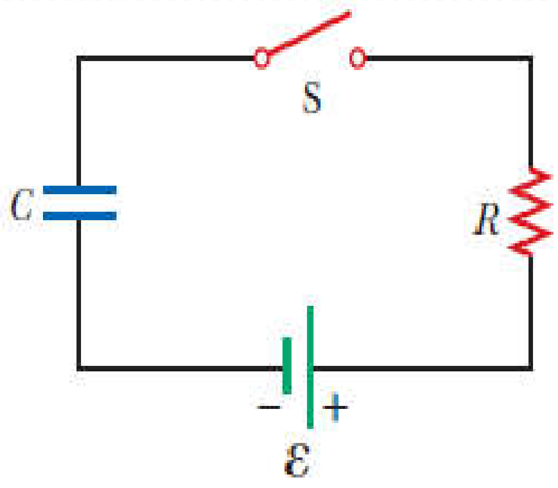
i) c) 2ε/R
Justo después de que se ha cerrado el interruptor, no existe carga en el capacitor. Mientras el capacitor comienza a cargarse, existe corriente en ambas ramas del circuito, por lo que la mitad derecha del circuito es equivalente a dos resistencias *R en paralelo, es decir, una resistencia equivalente de ½* R.

ii), d) ε/R . Después de mucho tiempo, el capacitor se carga por completo y la corriente en la rama derecha disminuye hasta cero. Ahora la corriente existe sólo en una resistencia *R a través* de la batería

EJEMPLO: ejercicio 2.1.14

Considere el circuito *RC* en serie de la figura en el cual *R* = 1,00 MΩ, *C* = 5,00 μF y *ε*= 30,0 V. Encuentre:

a) la constante de tiempo del circuito;
b) la máxima carga en el capacitor después de que se cierra el interruptor;
c) la carga en el capacitor y la corriente que circula 10,0 s después de cerrar el interruptor,
d) el tiempo que demora en alcanzar el capacitor el 75% de la carga máxima.



a) Constante de tiempo $\tau = RC$ =($1{,}00\times10^{6}$ Ω) ($5{,}00\times10^{-6}$ F) **= 5,00 s**

b) Carga máxima $Q = \varepsilon C$ = (30,0V) ($5{,}00\times10^{-6}$ F)= 150×10^{-6} C =150 μC

Q = 150 μC

c) Carga como función del tiempo:

$$q(t) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = (150\ \mu C)\left(1 - e^{-\frac{10{,}0}{5{,}00}}\right) = 129{,}70\ \mu C$$

q(*t* =10,0 s) = 130 μC

Corriente como función del tiempo: $I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{30{,}0}{1{,}00 \times 10^{6}} e^{-\frac{10{,}0}{5{,}00}} =$

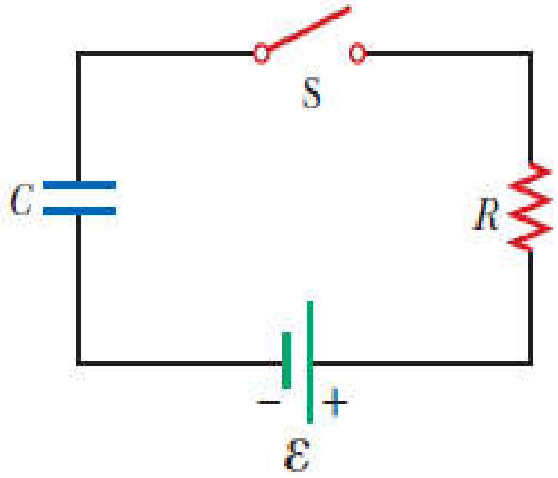
$$= (3{,}00 \times 10^{-5}) e^{-2} = 4{,}06\ \mu A$$

***I* (*t* =10 s)= 15,0 μA**

EJEMPLO: ejercicio 2.1.14

Considere el circuito *RC* en serie de la figura en el cual R = 1,00 MΩ, C = 5,00 μF y ε= 30,0 V. Encuentre:

a) la constante de tiempo del circuito;
b) la máxima carga en el capacitor después de que se cierra el interruptor;
c) la carga en el capacitor y la corriente que circula 10,0 s después de cerrar el interruptor,
d) el tiempo que demora en alcanzar el capacitor el 75% de la carga máxima.



d) Carga como función del tiempo: $q(t) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

$$\frac{3}{4}Q_f = Q_f\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad \frac{3}{4} = \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \qquad \frac{1}{4} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{t}{RC} \qquad -\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \ln(4) \qquad \ln(4) = \frac{t}{RC}$$

$$t = -RC\ln\left(\frac{1}{4}\right) = RC\ln(4) = 5{,}00\ln(4) = 6{,}93\ s$$

t **= 6,93 s**