Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2023

Práctico 2: Determinante y polinomio característico.

1. El objetivo de este ejercicio es trabajar sobre la noción de determinante de una matriz $n \times n$ y algunas propiedades del grupo de permutaciones S_n. Históricamente la noción de determinante apareció mucho antes que la de matriz, hace por lo menos 2000 años. Inicialmente surge a partir de la resolución de sistemas lineales de n ecuaciones con n incógnitas, y aparece en la como denominador en solución del sistema *genérico* cuando hay una solución única.

   La definición que damos data por lo menos desde Cramer en 1750.

   Denotemos por $[n]$ el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ y por S_n el grupo de permutaciones de n elementos, es decir funciones biyectivas $\pi : [n] \to [n]$ con la composición e inversa de funciones usuales como operaciones.

   La cantidad de inversiones de $\pi \in S_n$ es el número de pares $i < j$ tales que $\pi(j) < \pi(i)$. Denotemoes esta cantidad por inversiones(π).

   Definimos el determinante de una matrix $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ con entradas en un cuerpo $\mathbb{K}$ como

   $$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\text{inversiones}(\pi)} \, a_{1,\pi(1)} \cdots a_{n,\pi(n)}.$$

   Una transposición es una permutación que intercambia dos elementos de $[n]$ dejando los demás fijos. Se puede asumir en lo que sigue que toda transposición tiene un número impar de inversiones, y que componer una permutación cualqueira con una transposición cambia la paridad del número de inversiones.

   a) Mostrar que el determinante de la matriz identidad es 1.

   b) Usamos la notación $A = (v_1, \ldots, v_n)$ para una matriz $n \times n$ donde v_i es la i-ésima columna. Mostrar que $\det((v_1, \ldots, av_i + bv_i', \ldots, v_n) = a \det(v_1, \ldots, v_n) + b \det(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_n)$ para todo $a, b \in \mathbb{K}$ y vectores columna $v_1, \ldots, v_n, v_i'$.

   c) Mostrar que si A' se obtiene a partir de A intercambiando dos columnas entonces $\det(A') = -\det(A)$.

   d) Asumiendo que el determinante es la única función que cumple las propiedades demostradas en los anteriores tres items, demostrar que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ para todo $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Para esto sugerimos escribir $B = (v_1, \ldots, v_n)$ y ver que $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto \det(AB)/\det(A)$ cumple las propiedades anteriores.

   e) Mostrar que si $T : V \to V$ es una transformación lineal donde V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita entonces el determinante de toda matriz asociada a T (con igual base de llegada y partida) es el mismo. Por lo tanto queda bien definido $\det(T)$.

2. El objetivo de este ejercicio es trabajar sobre la interpretación de una matriz con coeficientes en $\mathbb{R}$ como un vólumen con signo. Esta interpretación, además de volver intuitiva alguna de las propiedades, aparece por ejemplo en la fórmula de cambio de variable para integrales en $\mathbb{R}^n$. El que quiera leer un poco más sobre esto puede mirar el capítulo sobre determinantes del libro de Lang de Álgebra Lineal.

   Tomamos como base para argumentar en este ejercicio las propiedades de geometría euclídea (área de triangulos, y ángulos). Supongamos que se quiere una función $A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que cumpla que $A(v, w)$ es el área del paralelogramo con vértices $0, v, v + w, w$ con signo positivo si el ángulo anti-horario desde v a w es menor que $180°$.

a) Demostrar que $A(e_1, e_2) = 1$ donde $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$.

b) Demostrar que $A(v,w) = -A(w,v)$.

c) Demostrar que $A(v, w + w') = A(v,w) + A(v,w')$, $A(v, \lambda w) = \lambda A(v,w)$ para todo $v, w, w' \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) Demostrar que $A((a,b),(c,d)) = ad - bc$.

e) ¿Se te ocurre cómo generalizar esto a $\mathbb{R}^3$?

3. El objetivo de este ejercicio es trabajar sobre la noción de polinomio característico, que para matrices chicas sirve para calcular explícitamente los valores propios, y también juega un rol teórico.

   El polinomio característico de una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ puede definirse como

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda),$$

   donde λ en el lado derecho representa λ veces la matriz identidad.

   a) Demostrar que si $T : V \to V$ es una transformación lineal de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n entonces el polinomio característico de toda matriz asociada (igual base de salida y llegada) es el mismo.

   b) Calcular el polinomio característico de todas las posibles formas de Jordan de matrices 3×3.

   c) Demostrar que las raices en $\mathbb{K}$ del polinomio característico de una transformación T son exáctamente los valores propios de T.

   d) Demostrar que el polinomio característico de una matriz en forma de Jordan es el producto de los polinomios característicos de cada bloque de Jordan.

   e) Demostrar que si p es el polinomio característico de T entonces $p(T) = 0$ (esto se llama Teorema de Cayley-Hamilton, en algunos textos se demuestra antes que la existencia de forma de Jordan, pero en este curso daremos una demostración de forma de Jordan independiente de este teorema). Para esto verificarlo para un bloque de Jordan, y argumentar. Observamos que incluso si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y T no tiene matriz asociada en forma de Jordan, se puede considerar cualquier matriz asociada como matriz compleja y concluir que $p(T) = 0$ igualmente (en general, podemos usar que todo cuerpo $\mathbb{K}$ es sub-cuerpo de un cuerpo algebráicamente cerrado).

4. El objetivo de este ejercicio es trabajar sobre la noción de polinomio minimal.

   El polinomio minimal de una transformación lineal $T : V \to V$ donde V es una $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita es el polinomio p mónico de menor grado tal que $p(T) = 0$. La misma definición puede darse para una matriz de $M_n(\mathbb{K})$.

   a) Mostrar que el polinomio minimal es único.

   b) Mostrar que el polinomio minimal de una matriz real no cambia si se considera como matriz compleja.

   c) Dar un ejemplo de una matriz o transformación cuyo polinomio minimal tiene estríctamente menor grado que su polinomio característico.

   d) Mostrar que el polinomio minimal divide al polinomio característico.

   e) Mostrar que una matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A^k = 1$ para algún k, es diagonalizable.

5. En los casos siguientes determinar si la matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable. En caso afirmativo hallar una matriz invertible Q y una matriz diagonal D tales que $A = QDQ^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Hallar las formas de Jordan de las siguientes matrices.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -13 & -1 & 16 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Para cada una de las siguientes matrices A, encontrar su forma de Jordan J y una matriz Q tal que $J = Q^{-1}A\,Q$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$