Práctico 1

1. Probar que el producto vectorial es un corchete de Lie en $\mathbb{R}^3$. *Sugerencia:* recordar que vale $x\wedge(y\wedge z) = (z\cdot x)y - (x\cdot y)z$, para todo $x,y,z\in\mathbb{R}^3$, siendo $x\wedge y$ el producto vectorial y $x\cdot y$ el producto escalar.

2. La base estándar de $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ es $\mathcal{B}=\{e,h,f\}$, siendo $e=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $f=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $h=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$.
   a) Verificar $[e,f]=h$, $[h,e]=2e$ y $[h,f]=-2f$.
   b) Deducir que $\Bbbk\{e,h\}$ y $\Bbbk\{f,h\}$ son subálgebras no abelianas de $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$.

3. Sea $b\in M_n(\Bbbk)$ una matriz arbitraria. Definimos $\mathfrak{gl}_{n,b}(\Bbbk) := \left\{x\in M_n(\Bbbk):\ x^t b + bx = 0\right\}$.
   a) Probar que $\mathfrak{gl}_{n,b}(\Bbbk)$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$.
   b) Probar que si $b\in M_n(\Bbbk)$ es invertible, entonces $\mathfrak{gl}_{n,b}(\Bbbk)\subset\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$.

4. Sea $L=\mathfrak{gl}_{3,\mathrm{id}}(\mathbb{R})=\{x\in\mathfrak{gl}_3(\mathbb{R}):\ x^t=-x\}$. Consideremos la base $\mathcal{B}=\{R_x,R_y,R_z\}$ definida por
$$R_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad R_y=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad R_z=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$
   Expresar $[R_x,R_y]$, $[R_y,R_z]$ y $[R_z,R_x]$ en términos de $\mathcal{B}$. Concluir $L\simeq\mathbb{R}^3_\wedge$.
   En lo que sigue V es un espacio vectorial no nulo de dimensión finita.

5. Sea $\beta: V\times V\to\Bbbk$ una forma bilineal. Definimos
$$\mathfrak{gl}(V)_\beta=\left\{x\in\operatorname{End}(V):\ \beta\big(x(u),v\big)+\beta\big(u,x(v)\big)=0,\ \forall u,v\in V\right\}.$$
   Probar que $\mathfrak{gl}(V)_\beta$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$.

6. Sea β una forma bilineal en V, con $\dim V=n$. Elegimos $\mathcal{B}$ una base de V. Definimos $\varphi:\operatorname{End}(V)\to M_n(\Bbbk)$ mediante $\varphi(x)=[x]_\mathcal{B}$, siendo $[x]_\mathcal{B}$ la matriz asociada a x en la base $\mathcal{B}$. Notar que $\varphi:\mathfrak{gl}(V)\to\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ es un isomorfismo de álgebras de Lie.
   a) Probar que φ induce un isomorfismo $\mathfrak{gl}(V)_\beta\simeq\mathfrak{gl}_{n,b}(\Bbbk)$, siendo $b=M_\mathcal{B}(\beta)\in M_n(\Bbbk)$ la matriz asociada a β en la base $\mathcal{B}$.
   Notar que β es una forma bilineal simétrica, antisimétrica o no degenerada si y solo si b es una matriz simétrica, antisimétrica o invertible, respectivamente.
   b) Probar que si β es no degenerada, entonces $\mathfrak{gl}(V)_\beta\subset\mathfrak{sl}(V)$.
   c) Sea β' otra forma bilineal en V.
      1) Probar que si β y β' son conjugadas[1], entonces $\mathfrak{gl}(V)_\beta$ y $\mathfrak{gl}(V)_{\beta'}$ son isomorfas.
      2) Consideramos $\mathcal{B}$ una base de V y sean b y b' las matrices asociadas a β y β' en $\mathcal{B}$, respectivamente. Probar que β y β' son formas conjugadas si y solo si b y b' son matrices congruentes[2].
   d) Probar que si $b,b'\in M_n(\Bbbk)$ son congruentes, entonces $\mathfrak{gl}_{n,b}(\Bbbk)\simeq\mathfrak{gl}_{n,b'}(\Bbbk)$.

[1] Dos formas bilineales β y β' en V son *conjugadas* si existe $z\in\mathrm{GL}(V)$ tal que $\beta'(u,v)=\beta\big(z(u),z(v)\big)$, para todo $u,v\in V$.
[2] Dos matrices $b,b'\in M_n(\Bbbk)$ son *congruentes* si existe $p\in\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ tal que $b'=p^t bp$.

Suma semidirecta.

7. Sean H y K dos álgebras y $\delta : H \to \mathrm{Der}(K)$, $x \mapsto \delta_x$, un morfismo de álgebras. En el espacio vectorial $H \oplus K = H \times K$ definimos

$$[(h,k),(h',k')] = \big([h,h']\ ,\ \delta_h(k') - \delta_{h'}(k) + [k,k']\big)\,, \quad \forall h,h' \in H,\ k,k' \in K. \tag{1}$$

Probar:

a) El producto definido en (1) es un corchete en $H \times K$. El álgebra así obtenida se llama la *suma semidirecta* de H y K y se simboliza por $H \oplus_\delta K$.

b) Pensando H y K contenidos en $H \oplus_\delta K$, H es una subálgebra y K es un ideal.

c) Para todo h en H es $(\mathrm{ad}_h)|_K = \delta_h$ (pensando H y K dentro de $H \oplus_\delta K$).

8. Sea L un álgebra y supongamos que $L = H \oplus K$, siendo H una subálgebra y K un ideal. Probar que L es isomorfa a $H \oplus_\delta K$ siendo $\delta : H \to \mathrm{Der}(K)$ un mapa que se hallará.

9. Una sucesión exacta corta $\mathcal{E} :\ K \overset{\varphi}{\to} L \overset{\psi}{\to} H$ se dice que se *escinde* si existe un morfismo de álgebras $\eta : H \to L$ tal que $\psi \circ \eta = \mathrm{id}$.

a) Probar que si H y K son álgebras y $\delta : H \to \mathrm{Der}(K)$ es un morfismo, entonces

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\ \iota\ } H \oplus_\delta K \xrightarrow{\ \rho\ } H \longrightarrow 0$$

se escinde, siendo $\iota(k) = (0,k)$ y $\rho(h,k) = h$.

b) Probar que $\mathcal{E} :\ K \overset{\varphi}{\to} L \overset{\psi}{\to} H$ se escinde si y solo si existe un morfismo de álgebras $\delta : H \to \mathrm{Der}(K)$ y un isomorfismo de álgebras $\alpha : L \to H \oplus_\delta K$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & L \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha"] & H \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
K \arrow[r, "\iota"] & H \oplus_\delta K \arrow[r, "\rho"] & H
\end{tikzcd}$$

Sugerencia: para el directo, probar $L = \mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\eta)$.

Álgebras de tipo simpléctico

10. Probar que si existe una forma bilineal antisimétrica no degenerada en V, entonces la dimensión de V es par. *Sugerencia:* recordar el ejercicio 6.

11. Sea β una forma bilineal antisimétrica no degenerada en V, con $\dim V = 2n$.

a) Probar que existen $e, f \in V$ tales que $\beta(e,f) = 1$. Deducir que $\{e,f\}$ es linealmente independiente.

b) Sean e, f como en la parte anterior y $U = \{v \in V :\ \beta(v,f) = \beta(v,e) = 0\}$. Probar:

1) $V = \Bbbk\{e,f\} \oplus U$.

2) La forma β restringida a U es no degenerada.

c) Probar que V admite una base $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ tal que $\beta(e_i, f_j) = \delta_{ij}$, para todo i, j. *Sugerencia:* razonar por inducción.

d) Deducir $\mathfrak{gl}_\beta(V) \simeq \mathfrak{sp}_{2n}(\Bbbk)$.

Álgebras de tipo ortogonal

12. Sea β una forma bilineal simétrica no degenerada en V, con $\dim V = n$.

   a) Probar que existe $v \in V$ tal que $\beta(v, v) \neq 0$.

   b) Probar que existe una base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de V tal que $\beta(e_i, e_j) = 0$, para todo $i \neq j$ y $\beta(e_i, e_i) \neq 0$, para todo i. *Sugerencia:* razonar como en el ejercicio 11.

   c) Probar $\dim \mathfrak{gl}(V)_\beta = \frac{n(n-1)}{2}$.

   d) Sea $\mathcal{B}$ como en 12*b*. Probar que si $\Bbbk = \mathbb{R}$, entonces podemos elegir $\mathcal{B}$ tal que $\beta(e_i, e_i) = \pm 1$, para todo i, y que si $\Bbbk = \mathbb{C}$, entonces podemos elegir $\mathcal{B}$ tal que $\beta(e_i, e_i) = 1$, para todo i.

   e) Deducir que si $\Bbbk = \mathbb{C}$, entonces $\mathfrak{gl}(V)_\beta \simeq \mathfrak{gl}_{n,\mathrm{id}}(\mathbb{C})$ el álgebra de las matrices antisimétricas.