Forma de Jordan

Pablo Lessa

1. ¿Porqué decidí escribir estas notas?

Camille Jordan escribió un tratado sobre substituciones lineales en 1870 ([Jor70]) que contiene básicamente el resultado que voy a exponer en estas notas.

Además, el teorema se encuentra demostrado, con ejercicios complementarios, y todo tipo de expliciones para ayudar al lector, en muchísimos libros (por ejemplo, [HJ85],[Dem97],[Jac53],[HK71],[Str76],[Lan69]). Esto incluye el libro de texto que recomendé para el curso [Axl15].

En esta última referencia se hace un poco más de enfasis en el polinomio característico de lo que hicimos en nuestro curso hasta ahora (si bien el tema se trata en el segundo práctico). Esto tampoco justifica escribir estas notas. Primero porque las diferencias son mínimas y fácilmente solventables por quien estudia. Y segundo porque incluso existen libros donde se toma el enfoque basado exclusivamente en el polinomio minimal, por ejemplo [BM23].

Además de esto, el tema se trata en cursos ofrecidos por prácticamente cualquier universidad, incluyendo algunas, como MIT, que ponen videos y materiales de sus cursos en línea [Str99].

Uno podrá decir que estas notas existen para ahorrar el trabajo a los estudiantes de buscar en todo ese material la parte relevante únicamente para aprender la demostración de la existencia de la forma de Jordan. Pero esto tampoco se justifica, porque existen artículos escritos por matemáticos y docentes universitarios, con el objetivo expreso de dar el camino 'más corto' o 'más elemental' o 'más natural' o directo a este teorema (ver [Tao07], [Loe14],[Väl86],[Bud12],[Fil72],[GW80])

Obviamente, aunque el inglés es actualmente el idioma universal de la ciencia (Los que hablamos castellano como lengua nativa podremos quejarnos. Pero la situación hace un par de cientos de años, cuando el idioma oficial era el latín, una lengua muerta, era mucho peor para todos.), también existen referencias adecuadas sobre este tema en castellano (como [RM01]).

Entonces ¿para qué escribí estas notas? Ni idea, ojalá a alguien le sirvan.

2. Un ejemplo

El objetivo de esta sección es illustrar el teorema de Jordan con un ejemplo. Para aprender algo de esta sección, me parece necesesario que quien lea, esté también haciendo las cuentas y verificando las afirmaciones que se hacen a medida que aparecen. Esto involucra básicamente resolver algunos sistemas de ecuaciones lineales, y razonar un poco con algunos vectores explícitos en $\mathbb{Q}^3$ y matrices 3×3 sobre $\mathbb{Q}$.

2.1. La matriz

Consideramos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -7 & 11 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix},$$

como matriz con entradas en $\mathbb{Q}$.

2.2. Polinomio minimal

Recordemos que un polinomio $p \in \mathbb{Q}[x]$ es mónico si es de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n.$$

El polinomio minimal de A es el polinomio mónico de menor grado tal que

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} + A^n = 0,$$

donde I es la matriz identidad 3×3.

En particular tomando $e_1 = (1,0,0)^t$ (la t indica transpuesta), si p cumple lo anterior se tiene

$$p(A) = a_0 I e_1 + a_1 A e_1 + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} e_1 + A^n e_1 = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$a_0 e_1 + a_1 A e_1 + \cdots + a_{n-1} A^{n-1} e_1 = -A^n e_1.$$

Calculamos

$$e_1^t = (1,0,0), (Ae_1)^t = (1,2,1), (A^2 e_1)^t = (0,-1,-1), (A^3 e_1)^t = (-1,-4,-3).$$

Observamos que los primeros 3 vectores son linealmente independientes por lo cual el polinomio minimal de A tiene grado al menos 3.

Resolviendo un sistema lineal de ecuaciones encontramos que

$$(1,2,1) - 2(0,-1,-1) = (1,4,3),$$

de forma que

$$p(A)e_1 = Ae_1 - 2A^2 e_1 + A^3 e_1 = 0,$$

para

$$p(x) = x - 2x^2 + x^3.$$

Multiplicando esta ecuacion por A obtenemos $p(A)e_1 = p(A)Ae_1 = p(A)A^2 e_1 = 0$, pero como $e_1, Ae_1, A^2 e_1$ son independientes esto implica

$$p(A) = 0,$$

y por lo tanto p es el polinomio minimal de A.

2.3. Subespacios invariantes

Observamos que $p(x) = x - 2x^2 + x^3 = x(x-1)^2$. Uno podría pensar, por analogía con lo que pasa al evaluar un polinomio en un número, que cómo

$$p(A) = A(A-I)^2 = 0,$$

tendríamos o $A = 0$ o $A = I$, pero esto no es verdad.

Lo que si es verdad es que A tiene núcleo no trivial que llamaremos V_0 (porque está asociado a la raiz 0 de p) y $(A-I)^2$ tiene núcleo no trivial que llamaremos V_1 (por estar asociado a la raiz 1 de p).

Calculamos resolviendo un sistema lineal de ecuaciones

$$V_0 = \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 : A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

y vemos que tiene dimensión 1 y está generado por $v_1 = (1,5,3)^t$.

Calculamos

$$V_1 = \ker((A-I)^2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 : (A-I)^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

y vemos que tiene dimensión 2 y está generado por $v_2 = (1,1,0)^t$ y $v_3 = (0,1,1)^t$.

Como v_1, v_2, v_3 son linealmente independendientes obtenemos

$$\mathbb{Q}^3 = V_1 \oplus V_2.$$

Además es fácil ver que si $v \in V_i$ entonces $Av \in V_i$, es decir cada V_i es invariante por A.

Esto implica que si considero la matriz con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtengo

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

donde la sub-matriz 2×2 cumple $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4. Base de Jordan

Podemos hacer las cosas mejor que tomar como base v_1, v_2, v_3.

Para esto calculamos $v_2' = (A-I)v_3 = (1,3,2)^t$.

El punto es que $(A-I)^2 v_3 = (A-I)v_2' = 0$ por lo cual v_2' es vector propio de valor propio 1.

Por lo tanto con

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

obtengo

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta es la forma de Jordan de A.

2.5. ¿Para qué?

La forma de Jordan responde por ejemplo a la pregunta de cómo son todas las transformaciones lineales de un espacio vectorial complejo en sí mismo, si consideramos dos transformaciones 'equivalentes' cuando son conjugadas por un isomorfismo lineal. Por lo tanto juega un rol teórico importante en el álgebra lineal, que a su vez es un tema bastante transversal a casi toda la matemática.

Una situacion concreta en la cuál la forma de Jordan resuelve un problema práctico es cuando queremos una fórmula cerrada para las potencias de una matriz cuadrada. En el práctico 1 se dan diversas situaciones (ecuaciones en recurrencia, ecuaciones diferenciales lineales, matrices de adyacencia de grafos) donde este tipo de cálculos puede ser útil.

Ilustremos esto mostrando que ahora sabemos calcular cualquier potencia de A.

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -7 & 11 \\ 1 & -5 & 8 \end{pmatrix}^n \\ &= C(C^{-1}AC)^n C^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-n & -n-1 & 2n+1 \\ 5-3n & -3n-4 & 6n+5 \\ 3-2n & -2n-3 & 4n+4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por ejemplo obtenemos

$$A^{100} = \begin{pmatrix} -98 & -101 & 201 \\ -295 & -304 & 605 \\ -197 & -203 & 404 \end{pmatrix},$$

que podría ser útil, en una serie de circumstancias muy particulares.

3. Resultados teóricos

3.1. Contexto

En esta seccion damos demostraciones generalizando los calculos hechos en la parte anterior. Tomaremos el punto de vista libre de coordenas y fijamos de ahora en más las siguientes notaciones

1. $\mathbb{K}$ es un cuerpo (podemos imaginar $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$),
2. $\mathbb{K}[x]$ es el conjunto de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ y variable x,
3. V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con dimensión finita d,
4. y $T : V \to V$ una transformación lineal de V en sí mismo.

De nuevo, considero que esta sección se puede aprovechar para aprender sólamente intentando seguir o producir los argumentos de las afirmaciones que aparecen, en el momento en que lo hacen.

3.2. Polinomios

Recordemos que un polinomio $p \in \mathbb{K}[x]$ es una expresión de la forma

$$p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

donde los coeficientes a_i son elementos de $\mathbb{K}$.

El grado de p es $\deg(p) = n$ si $a_n \neq 0$ en la expresión anterior. Para el polinomio nulo se define a veces $\deg(0) = -\infty$ para que se cumple la regla

$$\deg(pq) = \deg(p) + \deg(q),$$

para cualquier par $p, q \in \mathbb{K}[x]$ donde le producto de polinomios es el usual (se hace la distributiva y $x^i x^j = x^{i+j}$) y usamos la regla $-\infty + \text{algo} = -\infty$.

Usaremos sin demostración los siguientes resultados sobre $\mathbb{K}[x]$.

Teorema 1 (División de polinomios)**.** *Dados $p, q \in \mathbb{K}[x]$ donde $q \neq 0$, existen y son únicos $a, r \in \mathbb{K}[x]$ con $\deg(r) < \deg(q)$ tales que*

$$p = aq + r.$$

Si $r = 0$ en la división entera se dice que q divide a p. Un polinomio $p \in \mathbb{K}[x]$ es mónico si $p \neq 0$ y el coeficiente de $x^{\deg(p)}$ en p es 1.

Teorema 2 (Máximo divisor común)**.** *Dados $p, q \in \mathbb{K}[x]$ no nulos existe un único polinomio mónico $MDC(p, q) \in \mathbb{K}[x]$ de grado maximal entre los divisores comunes de p y q. Además, existen $a, b \in \mathbb{K}[x]$ tales que*

$$ap + bq = MDC(p, q).$$

3.3. Polinomio minimal

El concepto clave es que tiene sentido evaluar un polinomio $p = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ en la transformación lineal T. Para esto definimos

$$p(T) = a_0I + a_1T + \cdots + a_nT^n,$$

donde $I : V \to V$ es la transformación lineal identidad.

Como el espacio vectorial de las transformaciones lineales de V en sí mismo tiene dimensión finita d^2 obtenemos que

$$I, T, T^2, \ldots, T^{d^2},$$

son linealmente dependientes.

Tomamos n el mínimo tal que $I, \ldots, T^n$ son linealmente dependientes y elegimos $p \in \mathbb{K}[x]$ tal que

$$p(T) = a_0I + a_1T + \cdots + a_{n-1}T^{n-1} + T^n = 0,$$

este es el llamado polinomio minimal de T.

Lema 3 (Existencia y unicidad del polinomio minimal)**.** *Existe un único polinomio mónico de grado mínimo tal que* $p(T) = 0$*.*

Demostración. Si p y p' son polinomios mónicos que anulan T de grado mínimo usando la división con resto escribo

$$0 = p(T) = a(T)p'(T) + r(T),$$

donde $\deg(r) < \deg(p')$.

Como p' tenía grado minimal esto implica $r = 0$ por lo cual p' divide a p. El mismo argumento intercambiando p y p' nos da $p = p'$. □

En principio el argumento que dimos muestra que el grado del polinomio minimal es a lo sumo d^2. Esto se puede mejorar hasta d pero no se necesita en lo que sigue.

3.4. Subespacios invariantes

Un subespacio S de V es T-invariante (o sólo invariante si T está determinado en el contexto) si $T(S) \subset S$.

Mostramos ahora como factorizar el polinomio minimal en factores coprimos da una descomposición de V como suma directa de subespacios invariantes.

Lema 4 (Factorización del polinomio minimal y subespacios invariantes)**.** *Si* $p \in \mathbb{K}[x]$ *cumple* $p(T) = 0$ *y* $p = p_1 \cdots p_n$ *donde* $MCD(p_i, p_j) = 1$ *para todo* $i \neq j$*, entonces*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i,$$

donde $V_i = \ker(p_i(T))$*.*

Demostración. Asumimos primero que $n = 2$.

Elegimos $a, b \in \mathbb{K}[x]$ tales que $ap_1 + bp_2 = 1$ y obtenemos

$$I = a(T)p_1(T) + b(T)p_2(T).$$

Aplicando esto a $v \in V_1 \cap V_2$ obtenemos

$$v = a(T)p_1(T)v + b(T)p_2(T)v = 0,$$

por lo cual $V_1 \oplus V_2$.

Como $p_1(T)(V) \subset V_2$ y $p_2(T)(V) \subset V_1$ la ecuación

$$v = p_1(T)(a(T)v) + p_2(T)(b(T))v,$$

muestra que $V = V_1 + V_2$.

Ahora asumimos que el enunciado vale para $n - 1$ factores coprimos y lo demostraremos para n.

Por la hipótesis inductiva aplicada a $p = (p_1p_2)p_3 \cdots p_n$ se obtiene

$$V = \ker(p_1(T)p_2(T)) \oplus \bigoplus_{i=3}^{n} V_i.$$

Observamos que $\ker(p_1(T)) \subset \ker(p_1(T)p_2(T)$ y $\ker(p_2(T)) \subset \ker(p_1(T)p_2(T))$.

Además, como $p_1(T)p_2(T) = 0$ en $\ker(p_1(T)p_2(T))$ obtenemos usando de nuevo la hipótesis inductiva que

$$\ker(p_1(T)p_2(T)) = \ker(p_1(T)) \oplus \ker(p_2(T)).$$

□

Observamos que el lema anterior muestra que se puede elegir una base (eligiendo una de cada V_i) de forma de que la matriz asociada es *diagonal por bloques* es decir de la forma

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_n \end{pmatrix},$$

donde B_i es una matriz cuadrada que satisface $p_i(B_i) = 0$ (los ceros en la fórmula anterior representan matrices nulas de diferentes tamaños).

En el caso especial donde $p_i(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$ podemos refinar esta presentación, eligiendo una cambio de base adecuado para cada B_i. Para esto estudiamos la estructura de matrices, o transformaciones, que cumplen (como $B_i - \lambda_i I$) que alguna potencia es nula.

3.5. Transformaciones nilpotentes

Teorema 5 (Clasificación de transformaciones nilpotentes)**.** *Si el polinomio minimal de T es $p(x) = x^n$ entonces existe una base de V de la forma*

$$v_1, Tv_1, \ldots, T^{n-1}v_1, v_2, \ldots, T^{m_2}v_2, \ldots, v_k, \ldots, T^{m_k}v_k,$$

donde $T^{m_i+1}v_i = 0$ para $i = 2, \ldots, k$.

Demostración. Si $n = 1$ entonces $T = 0$ y cualquier base de V cumple el enunciado. Asumimos $n \geq 2$ en lo que sigue y definimos $K_0 = \{0\}$ y $K_i = \ker(T^i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Observamos que

$$K_0 \subset \cdots \subset K_i \subset K_{i+1} \subset \cdots \subset K_n = V.$$

Como $T^{n-1} \neq 0$ existe un subespacio S_n no nulo con

$$V = S_n \oplus K_{n-1}.$$

Nuestra construcción se basa en el siguiente lema:

Lema 6. *Si $k > 1$ y S_k es un subsepacio tal que $K_k = S_k \oplus K_{k-1}$ entonces $T(S_k) \subset K_{k-1}$ y $T(S_k) \cap K_{k-2} = \{0\}$.*

Demostración del lema. La primer afirmación se obtiene directamente porque $S_k \subset K_k$ de forma que $\{0\} = T^k(S_k) = T^{k-1}(T(S_k))$.

Para la segunda, tomamos $v \in S_k$ tal que $Tv \in S_k \cap K_{k-2}$ y obtenemos $T^{k-2}Tv = T^{k-1}v = 0$ de modo que $v \in K_{k-1}$, contradiciendo que $S_k \oplus K_{k-1} = K_k$. □

Usando el lema anterior construimos, a partir del S_n previamente elegido una sucesión de subespacios $S_n, S_{n-1}, \ldots, S_1$ tal que

$$T(S_k) \subset S_{k-1},$$

para $k \geq 2$ y

$$K_k = S_k \oplus K_{k-1}$$

para $k = 1, \ldots, n$.

Afirmamos que $V = \bigoplus_{k=1}^{n} S_k$. Para esto demostramos inductivamente que $\bigoplus_{k=1}^{m} S_k = K_m$ para $m = 1, \ldots, n$.

Para $m = 1$ esto se reduce a que $K_0 = \ker(T) = S_1 \oplus K_0 = S_1$.

Por inducción obtenemos ahora

$$\bigoplus_{k=1}^{m+1} S_k = S_{m+1} \oplus \bigoplus_{k=1}^{m} S_k = S_{m+1} \oplus K_m = K_{m+1},$$

para todo m, como se buscaba demostrar.

Para concluir la demostración observamos que $S_k \cap \ker(T) = \{0\}$ si $k \geq 2$. Por lo tanto, para $k \geq 2$, dada cualquier base B_k de S_k se puede completar $T(B_k)$ a una base de S_{k+1}.

Usando esta observación tomamos B_n una base de S_n, B_{n-1} base de S_{n-1} que contiene $T(B_n)$, e inductivamente para cada $k < n$ una base B_k de S_k que contiene $T(B_{k+1})$.

La base $B = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ cumple el enunciado. □

3.6. Forma de Jordan

Definimos como bloque de Jordan $J(n, \lambda)$ dado $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ la matriz $n \times n$ siguiente

$$J(n,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

es decir los elementos de la diagonal principal son λ, y las entradas en fila i y columna $i+1$ son iguales a 1 para $i = 1, \ldots, n-1$ (todos los demás elementos son cero).

Dadas matrices cuadradas $B_1, \ldots, B_k$ donde B_i es $n_i \times n_i$, definimos $\operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_k)$ como la matriz $(n_1 + \cdots + n_k) \times (n_1 + \cdots + n_k)$ siguiente

$$\operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_k) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix}$$

donde los ceros representan bloques nulos de diferentes tamaños.

Teorema 7 (Forma de Jordan)**.** *Si $T : V \to V$ es lineal donde V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, y el polinomio minimal de T es de la forma $p(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k}$ donde los $\lambda_i \in \mathbb{K}$ son dos a dos distintos, entonces existe una base B de V tal que*

$$_B[T]_B = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_m),$$

donde cada J_i es un bloque de Jordan de algún λ_j.

Demostración. Por el lema 4 se tiene $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ donde $V_i = \ker((T - \lambda_i I)^{m_i})$.

Por el teorema 5 puede elegir una base de cada V_i formado por sucesiones de la forma $B = \{v, (T-\lambda_i)v, (T-\lambda_i)^2 v, \ldots, (T-\lambda_i)^l v\}$ donde $(T-\lambda_i)^{l+1} v = 0$. Observamos que la matriz asociada a T restricto al subespacio generado por una tal sucesión B (tomada en orden reverso) es $J(\lambda_i, l)$.

Tomando la unión de estas bases obtiene el enunciado. □

Razonando con matrices de Jordan es posible refinar el teorema anterior. Por ejemplo, vemos que hay al menos un bloque de la forma $J(\lambda_i, m_i)$ para cada i. Sin embargo, no es posible determinar exáctamente qué bloques de Jordan aparecerán sólamente a partir del polinomio minimal. Es necesario conocer la dimensión del núcleo de $(T - \lambda_i I)^j$ para cada $j = 1, \ldots, m_i$.

Referencias

[Axl15] Sheldon Axler. *Linear algebra done right.* Undergraduate Texts Math. Cham: Springer, 3rd ed. edition, 2015.

[BM23] Fernando Barrera-Mora. *Linear algebra. A minimal polynomial approach to eigen theory.* De Gruyter Grad. Berlin: De Gruyter, 2023.

[Bud12] Wono Setya Budhi. Another elementary proof of the Jordan form of a matrix. In *The 5th international conference on research and education in mathematics, ICREM5, Bandung, Indonesia, October, 22–24, 2011*, pages 23–27. Melville, NY: American Institute of Physics (AIP), 2012.

[Dem97] James W. Demmel. *Applied numerical linear algebra.* Philadelphia, PA: SIAM, 1997.

[Fil72] A. F. Filippov. A short proof of the theorem on the reduction of a matrix to Jordan form. *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 26(1-2), 1972.

[GW80] A. Galperin and Z. Waksman. An elementary approach to Jordan theory. *Am. Math. Mon.*, 87:728–732, 1980.

[HJ85] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. Matrix analysis. Cambridge etc.: Cambridge University Press. XIII, 561 p. (1985)., 1985.

[HK71] K. Hoffman and R. Kunze. Linear algebra. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, Inc. VIII, 407 p. (1971)., 1971.

[Jac53] Nathan Jacobson. Lectures in abstract algebra. Vol. II: Linear algebra. Toronto-New York-London: D. Van Nostrand Co., Inc. xii, 280 p. (1953)., 1953.

[Jor70] C. Jordan. Treatise on algebraic substitutions. Paris 1870 (1870)., 1870.

[Lan69] P. Lancaster. Theory of matrices. New York - London: Academic Press. XII, 316 p. (1969)., 1969.

[Loe14] Nicholas Loehr. Classifying nilpotent maps via partition diagrams. *Coll. Math. J.*, 45(2):108–115, 2014.

[RM01] Hugo Alberto Rincón-Mejía. *Álgebra lineal.* México: Facultad de Ciencias, UNAM, 2001.

[Str76] Gilbert Strang. Linear algebra and its applications. New York-San Francisco-London: Academic Press, a subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XI, 374 p. $ 11.95 (1976)., 1976.

[Str99] Gilbert Strang. Mit linear algebra lecture 28. `https://ocw.mit.edu/courses/18-06-linear-algebra-spring-2010/resources/lecture-28-similar-matrices-and-jordan-form/`, 1999.

[Tao07] Terrence Tao. The jordan normal form and the euclidean algorithm, 2007.

[Väl86] H. Väliaho. An elementary approach to the Jordan form of a matrix. *Am. Math. Mon.*, 93:711–714, 1986.