Práctico 1

September 6, 2023

Contents

1 Ejercicio 1

Consideremos una v.a. X con distribuición discreta, que toma los valores $x_1, x_2, ...$; y otra v.a. Y con esperanza $\mathbb{E}Y$. Demostrar que la función $g(x)$ definida para los valores $x = x_k$ $(k = 1, 2, ...)$ mediante

$$g(x) = \frac{1}{P(X = x)}\mathbb{E}(Y1_{X=x}) \tag{1}$$

verifica la definición de esperanza condicional dada en el curso.

Solución

Sea $I = (a, b]$ un intervalo arbitrario.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)1_{X\in I}) &= \sum_k g(x_k)P(X = x_k)1_{X=x_k} &(2)\\
&= \sum_k \frac{1}{P(X = x_k)}\mathbb{E}(Y1_{X=x_k})P(X = x_k)1_{X=x_k} &(3)\\
&= \sum_k \mathbb{E}(Y1_{X=x_k})1_{X=x_k} &(4)\\
&= \mathbb{E}(Y1_{X\in I}) &(5)
\end{aligned}$$

2 Ejercicio 2

Consideremos una v.a. X, y otra v.a. Y con varianza $\mathbf{var}Y$. Definimos la varianza condicional de Y dad X, que designamos como $\mathbf{var}(Y|X)$, mediante

$$\mathbf{var}(Y|X) = \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y|X))^2|X) \tag{6}$$

1. Demostrar
$$\mathbf{var}Y = \mathbf{var}\mathbb{E}(Y|X) + \mathbb{E}\mathbf{var}(Y|X) \tag{7}$$
2. Consideremos la suma de una cantidad aleatoria de sumandos del ejemplo 9.10 del libro. Demostrar
$$\mathbf{var}S = a^2\mathbf{var}N + \mathbb{E}N\mathbf{var}X_1, \tag{8}$$
con $a = \mathbb{E}X_1$.

Solución

Usaremos repetidamente las identidades

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \mathbb{E}Y, \quad \text{and} \quad \mathbb{E}(h(X)Y|X) = h(X)\mathbb{E}(Y|X) \tag{9}$$

1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\mathbf{var}(Y|X) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y|X))^2|X)\right) &(10)\\
&= \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}(Y|X))^2) &(11)\\
&= \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}Y + \mathbb{E}Y - \mathbb{E}(Y|X))^2) &(12)\\
&= \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}Y + \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) - \mathbb{E}(Y|X))^2) &(13)\\
&= \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}Y)^2) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) - \mathbb{E}(Y|X))^2) + &(14)\\
&\quad +2\mathbb{E}((Y - \mathbb{E}Y)(\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) - \mathbb{E}(Y|X))) &\\
&= \mathbf{var}Y + \mathbf{var}\mathbb{E}(Y|X) + &(15)\\
&\quad -2\mathbb{E}((Y - \mathbb{E}Y)(\mathbb{E}(Y|X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)))) &\\
&= \mathbf{var}Y + \mathbf{var}\mathbb{E}(Y|X) + &(16)\\
&\quad -2\mathbb{E}\left(\mathbb{E}((Y - \mathbb{E}Y)(\mathbb{E}(Y|X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)))|X)\right) &\\
&= \mathbf{var}Y + \mathbf{var}\mathbb{E}(Y|X) + &(17)\\
&\quad -2\mathbb{E}\left((\mathbb{E}(Y|X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)))\mathbb{E}((Y - \mathbb{E}Y)|X)\right) &\\
&= \mathbf{var}Y + \mathbf{var}\mathbb{E}(Y|X) - 2\mathbb{E}\left((\mathbb{E}(Y|X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)))^2\right) &(18)\\
&= \mathbf{var}Y - \mathbf{var}\mathbb{E}(Y|X) &(19)
\end{aligned}$$

donde usamos que $\mathbb{E}((Y - \mathbb{E}Y)|X) = \mathbb{E}(Y|X) - \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$.

2. Dada la suma de una cantidad aleatoria de sumandos,

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{20}$$

recordar que

$$\mathbb{E}(S|N) = aN, \quad \text{y} \quad \mathbb{E}S = a\mathbb{E}N. \tag{21}$$

Calculamos $\mathbf{var}S$ usando la fórmula de la parte anterior,

$$\begin{aligned}
\mathbf{var}(S) &= \mathbf{var}\mathbb{E}(S|N) + \mathbb{E}(\mathbf{var}(S|N)) && (22)\\
&= \mathbf{var}(aN) + \mathbb{E}(\mathbb{E}((S-aN)^2|N)) && (23)\\
&= a^2\mathbf{var}N + \mathbb{E}(S^2) - a^2\mathbb{E}N^2, && (24)
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos $\mathbb{E}(2aSN|N) = 2aN\mathbb{E}(S|N)$. Ahora bien, fijado N,

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)^2 |N\right) = N\mathbb{E}X_1^2 + (N^2 - N)(\mathbb{E}X_1)^2 = N\mathbf{var}X_1 + a^2N^2 \tag{25}$$

Por tanto,

$$\mathbb{E}S^2 = \mathbb{E}(\mathbb{E}(S^2|N)) = \mathbb{E}N\mathbf{var}X_1 + a^2\mathbb{E}N^2, \tag{26}$$

y concluímos que

$$\mathbf{var}(S) = a^2\mathbf{var}N + \mathbb{E}N\mathbf{var}X_1 \tag{27}$$

3 Ejercicio intermedio 1

(Brzezniak, 2.1) 3 monedas de 10, 20 y 50 son tiradas, y los valores de los números que quedan hacia arriba sumados. ¿Cuál es el valor total esperado, dado que exactamente dos monedas caen con el número hacia arriba?

Solución

Sea B_n la distribución de Bernoulli que vale 0 o 1 con $p = 1/2$ asociada a la moneda de valor n. La variable que condiciona la llamamos X, dada por,

$$X = (1 - B_{10})B_{20}B_{50} + (1 - B_{20})B_{10}B_{50} + (1 - B_{50})B_{10}B_{20}, \tag{28}$$

mientras que el monto total está dado por

$$Y = 10B_{10} + 20B_{20} + 50B_{50}. \tag{29}$$

Queremos hallar $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$. Usando el ejercicio 1 y contando los casos, vemos que $X = 1$ implica que $Y = \{30, 60, 70\}$, por lo que

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \frac{1}{P(X=1)}\left(30P(Y=30) + 60P(Y=60) + 70P(Y=70)\right) = \frac{160}{3}. \tag{30}$$

Ahora bien, si queremos hallar $\mathbb{E}(Y|X)$ como *función* de X, debemos ver todos los valores que toma. Como $X \in \{0, 1\}$, sólo tenemos dos valores donde calcular, y por tanto el único candidato a probar es una función lineal (en 0 no importa el valor dada la definición en términos de la esperanza). Por tanto,

$$\mathbb{E}(Y|X) = \frac{160}{3}X \tag{31}$$

4 Ejercicio intermedio 2

(Brzezniak, 2.2) 3 monedas de 10, 20 y 50 son tiradas, y los valores de los números que quedan hacia arriba sumados. ¿Cuál es el valor total esperado, dada la suma parcial mostrada por las monedas de 10 y 20?

Solución

La variable que condiciona es,

$$X = 10(1 - B_{20})B_{10} + 20(1 - B_{10})B_{20} + 30B_{10}B_{20}, \tag{32}$$

mientras que el monto total está dado por

$$Y = 10B_{10} + 20B_{20} + 50B_{50}. \tag{33}$$

Usando la función del ejercicio 1,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y|X = 0) &= 25 && (34)\\
\mathbb{E}(Y|X = 10) &= 35 && (35)\\
\mathbb{E}(Y|X = 20) &= 45 && (36)\\
\mathbb{E}(Y|X = 30) &= 55 && (37)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbb{E}(Y|X) = X + 25 \tag{38}$$

5 Ejercicio 3

Sean X, Y dos v.a. ind. con esperanza nula, cada una de las cuales tiene distribución normal.

a) Demostrar que

$$\mathbb{E}((X - Y)^2|X^2 + Y^2) = \mathbb{E}((X - Y)^2|X^2, Y^2) = X^2 + Y^2 \tag{39}$$

b) ¿ Vale el mismo resultado cuando X, Y son ind., simétricas y tienen densidad?

Solución

a) Usaremos repetidamente que las variables son independientes, la linealidad de la esperanza y que $\mathbb{E}(h(X)|X) = h(X)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X - Y)^2|X^2 + Y^2) &= \mathbb{E}((X^2 + Y^2 - 2XY|X^2 + Y^2) && (40)\\
&= X^2 + Y^2 - 2\mathbb{E}(XY|X^2 + Y^2) && (41)\\
\text{independencia} &= X^2 + Y^2 - 2\mathbb{E}(X|X^2 + Y^2)\mathbb{E}(Y|X^2 + Y^2) && (42)\\
\text{independencia} &= X^2 + Y^2 - 2\mathbb{E}(X|X^2)\mathbb{E}(Y|Y^2) && (43)
\end{aligned}$$

Ahora bien, como X es normal de esperanza nula, su distribución es simétrica respecto a $x \mapsto -x$, por lo que $\mathbb{E}(X|X^2) = 0$. Por tanto, tenemos que

$$\mathbb{E}((X - Y)^2|X^2 + Y^2) = X^2 + Y^2 \tag{44}$$

Para la segunda igualdad, observar que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X-Y)^2|X^2,Y^2) &= \mathbb{E}((X^2+Y^2-2XY|X^2,Y^2) && (45)\\
&= \mathbb{E}(\langle(X^2,Y^2),(1,1)\rangle - 2XY|X^2,Y^2) && (46)\\
&= \langle(X^2,Y^2),(1,1)\rangle - 2\mathbb{E}(XY|X^2,Y^2) && (47)\\
\text{independencia} &= \langle(X^2,Y^2),(1,1)\rangle - 2\mathbb{E}(X|X^2,Y^2)\mathbb{E}(Y|X^2,Y^2) && (48)\\
\text{independencia} &= \langle(X^2,Y^2),(1,1)\rangle - 2\mathbb{E}(X|X^2)\mathbb{E}(Y|Y^2) && (49)
\end{aligned}$$

Usando simetría de la distribución se deduce nuevamente la igualdad buscada.

b) Está claro que en la parte anterior solamente usamos las hipótesis de independencia y simetría. Veamos que una distribución simétrica genérica cumple que $\mathbb{E}(X|X^2)=0$ En su versión discreta,

$$\mathbb{E}(X|X^2=a^2)=\sum_x xP(X=x|X^2=a^2)=a\frac{P(X=a)-P(X=-a)}{P(X=a)+P(X=-a)} \tag{50}$$

y para la versión continua (derivando $P(|X|\le a)$ o tomando el límite contínuo de la expresión anterior),

$$\mathbb{E}(X|X^2)=|X|\frac{f(|X|)-f(-|X|)}{f(|X|)+f(-|X|)}. \tag{51}$$

Por tanto, si f es simétrica bajo $x\mapsto -x$ resulta que $\mathbb{E}(X|X^2)=0$.

6 Ejercicio 4

Solución

7 Ejercicio 5

Consideremos una sucesión de v.a. $\{X_n\}$ que verifica

$$P(X_{n+1}\in I|X_0,\ldots,X_n)=P(X_{n+1}\in I|X_n)\quad \forall n=1,2,\ldots,\forall I=[a,b] \tag{52}$$ {1}

Demostrar que si las v.a. toman valores en un conjunto $\mathcal{I}$ finito o numerable, la definición anterior es equivalente a la definición de cadenas de Markov: $\{X_n\}$ es una cadena de Markov si verifica

$$P(X_{n+1}=x_{n+1}|X_0=x_0,\ldots,X_n=x_n)=P(X_{n+1}=x_{n+1}|X_n=x_n)\quad \forall n=1,2,\ldots, \tag{53}$$

y para toda sucesión de estados $x_0,\ldots,x_{n-1}\in\mathcal{I}$.

Solución

$\Rightarrow$) Observar que (52) es equivalente a

$$\mathbb{E}(1|_{X_{n+1}\in I}|X_0,\ldots,X_n)=\mathbb{E}(1|_{X_{n+1}\in I}|X_n), \tag{54}$$

por definición de probabilidad condicional entre dos v.a.

Fijado n y una sucesión de estados $x_0, ..., x_{n-1} \in \mathcal{I}$,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, ..., X_n = x_n) &= \mathbb{E}(1|_{X_{n+1}=x_{n+1}} | X_0 = x_0, ..., X_n = x_n) && (55)\\ &= \mathbb{E}(1|_{X_{n+1}=x_{n+1}} | X_n = x_n) && (56)\\ &= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n). && (57) \end{aligned}$$

Como n y la sucesión arbitrarios, se tiene que se cumple la definición de cadena de Markov.

$\Leftarrow$) Fijado n y una sucesión de estados $x_0, ..., x_{n-1} \in \mathcal{I}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1|_{X_{n+1}=x_{n+1}} | X_0 = x_0, ..., X_n = x_n) &= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, ..., X_n = x_n) && (58)\\ &= P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) && (59)\\ &= \mathbb{E}(1|_{X_{n+1}=x_{n+1}} | X_n = x_n), && (60) \end{aligned}$$

y análogamente se tiene que se cumple la definición (52).

8 Ejercicio 6

Demostrar $\mathbb{E}|\mathbb{E}(Y|X)| \leq \mathbb{E}|Y|$: (b) sin utilizar la desigualdad de Jensen, (a) utilizándola.

Solución

(a) Sea $g(X) = \mathbb{E}(Y|X)$. Consideremos los conjuntos I^+, I^- tales que

$$\begin{cases} g(x) < 0 & \text{si } x \in I^-, \\ g(x) > 0 & \text{si } x \in I^+. \end{cases} \tag{61}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|g(X)| &= \mathbb{E}(1|_{\{X \in I^+\}} g(X) - 1|_{\{X \in I^-\}} g(X)) && (62)\\ &= \mathbb{E}(1|_{\{X \in I^+\}} g(X)) - \mathbb{E}(1|_{\{X \in I^-\}} g(X)) && (63)\\ &= \mathbb{E}(1|_{\{X \in I^+\}} Y) - \mathbb{E}(1|_{\{X \in I^-\}} Y) && (64)\\ &\leq \mathbb{E}(1|_{\{X \in I^+\}} |Y|) + \mathbb{E}(1|_{\{X \in I^-\}} |Y|) && (65)\\ &= \mathbb{E}|Y|, && (66) \end{aligned}$$

donde usamos $Y \leq |Y|$, $-Y \leq |Y|$ y la monotonía de la esperanza.

(b) Como $\phi(x) \equiv |x|$ es convexa,

$$\mathbb{E}|\mathbb{E}(Y|X)| \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|Y||X)) = \mathbb{E}|Y| \tag{67}$$

9 Ejercicio 7

(a) Demostrar la desigualdad de Jensen.

(b) Obtener, a partir de la desigualdad de Jensen, la desigualdad de Lyapunov: Dada una variable aleatoria X con momento absoluto $\beta_r = \mathbb{E}(|X|^r)$ finito, se verifica

$$\beta_s^{1/s} \leq \beta_r^{1/r}, \quad \text{si } 0 < s < r \tag{68}$$

Solución

(a) Tomando $X \equiv 1$, la v.a. que es constante a 1, entonces $\mathbb{E}(Y, X) \equiv \mathbb{E}Y$ y se deduce que

$$\phi(\mathbb{E}(Y)) = \phi(\mathbb{E}(Y|X)) \leq \mathbb{E}(\phi(Y)|X) = \mathbb{E}(\phi(Y)) \tag{69}$$

(b) Considerar la función $\phi(x) = x^{r/s}$. Observar que como $0 < s < r$, entonces ϕ es convexa. Por tanto,

$$\phi(\mathbb{E}(|X|^s)) \leq \mathbb{E}(\phi(|X|^s)), \tag{70}$$

que sustituyendo resulta,

$$\beta_s^{r/s} \leq \beta_r, \tag{71}$$

de donde se deduce el resultado.

10 Ejercicio 8

Consideremos una sucesión $N, X_1, X_2, ...$ de v.a. independientes, tales que $X_1, X_2, ...$ son i.d., la variable aleatoria N tiene distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$. Demostrar que la función característica de la variable aleatoria $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ está dada por

$$f(t) := \mathbb{E}(e^{itS}) = \exp\left\{\lambda \mathbb{E}(e^{itX_1} - 1)\right\} \tag{72}$$

Solución

Usando la técnica de cálculo con la esperanza conidcionada a N, podemos sustituir la suma por NX_1, pues son i.i.d

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{itS}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{itS}|N)) && (73)\\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{itNX_1}|N)) && (74)\\
\text{independencia} &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{itX_1}|N)^N) && (75)\\
\text{independencia} &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{itX_1})^N) && (76)\\
N \sim Pois(\lambda) &= \sum_{k\leq 0}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \mathbb{E}(e^{itX_1})^k && (77)\\
&= e^{-\lambda} \sum_{k\leq 0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{E}(e^{itX_1})^k && (78)\\
&= \exp\left\{\lambda \mathbb{E}(e^{itX_1} - 1)\right\} && (79)
\end{aligned}$$

11 Ejercicio 9

Sea $\{Y_n\}$ una martingala. Demostrar:

(a) $\mathbb{E}(Y_{m+n}|F_n) = Y_n$ es equivalente a la definición.

(b) $\mathbb{E}Y_n = \mathbb{E}Y_0$.

(c) $\mathbb{E}Y_n \leq \mathbb{E}Y_{n+1}$ para submartingalas y $\mathbb{E}Y_n \geq \mathbb{E}Y_{n+1}$ para supermartingalas.

Solución

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{m+n}|F_n) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_{m+n}|F_{m+n-1})|F_n) && (80)\\
&= \mathbb{E}(Y_{m+n-1}|F_n) && (81)\\
&= ... && (82)\\
&= Y_n && (83)
\end{aligned}$$

(b) $\mathbb{E}Y_0 = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y_1|F_0)) = \mathbb{E}Y_1 = ... = \mathbb{E}Y_n$ para todo n.

(c) Análogo a la parte (b), respetando las desigualdades.

12 Ejercicio 10

Sea $\{X_n\}_{n\geq 0}$ sucesión de v.a. **independientes** tales que $\mathbb{E}X_n = 0$ y tales que existe $\mathbb{E}(e^{X_0+...+X_n})$. (a) Demostrar que $\{Y_n = e^{X_0+...+X_n}\}$ es una submartingala. (b) Encontrar constantes a_n tales que $\{Z_n = e^{X_0+...+X_n-a_n}\}$ sea una martingala.

Solución

(a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_{n+1}|F_n) &= \mathbb{E}(e^{X_0+...+X_n}e^{X_{n+1}}|F_n) && (84)\\
&= e^{X_0+...+X_n}\mathbb{E}(e^{X_{n+1}}|F_n) && (85)\\
\text{Jensen} &\geq Y_n e^{\mathbb{E}(X_{n+1}|F_n)} && (86)\\
\text{independencia} &= Y_n. && (87)
\end{aligned}$$

(b) De las identidades anteriores,

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}|F_n) = e^{X_0+...+X_n}\mathbb{E}(e^{X_{n+1}}|F_n) = e^{X_0+...+X_n+\ln(\mathbb{E}(e^{X_{n+1}}))}, \tag{88}$$

por lo que el candidato natural es

$$Z_n = Y_n e^{-\sum_{i=1}^{n}\ln\mathbb{E}(e^{X_i})}. \tag{89}$$

Verificamos,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_{n+1}|F_n) &= \mathbb{E}(Y_{n+1}e^{-\sum_{i=1}^{n+1}\ln\mathbb{E}(e^{X_i})}|F) && (90)\\
&= Z_n\mathbb{E}(e^{X_{n+1}}e^{-\ln\mathbb{E}(e^{X_{n+1}})}|F) && (91)\\
&= Z_n e^{-\ln\mathbb{E}(e^{X_{n+1}})}\mathbb{E}(e^{X_{n+1}}) = Z_n && (92)
\end{aligned}$$

13 Ejercicio 11

Sea $\{Y_n\}$ submartingala adaptada a $\{F_n\}$. (a) Demostrar que

$$M_n = Y_0 + \sum_{i=1}^{n}(Y_k - \mathbb{E}(Y_k|F_{k-1})), \quad n = 1, ... \tag{93}$$

es una martingala, y que la sucesión de compensadores $A_n := Y_n - M_n$ verifica

$$0 \leq A_1 \leq A_2 \leq ... \tag{94}$$

(b) Calcular el compensador de $\{S_n^2\}$, con $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $S_0 = 0$, y X_i son v.a. ind., de esperanza nula, y tales que existe $\mathbb{E}X_i^2$.

Solución

(a) $\{M_n\}$ es martingala adaptada a F_n,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{n+1}|F_n) &= M_n + \mathbb{E}(Y_{n+1} - \mathbb{E}(Y_{n+1}|F_n)|F_n) && (95)\\ &= M_n. && (96) \end{aligned}$$

Para la sucesión de compensadores,

$$A_n = Y_n - \left(Y_0 + \sum_{i=1}^{n} (Y_k - \mathbb{E}(Y_k|F_{k-1})) \right) \quad (97)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}(Y_n|F_{n-1}) - M_{n-1} && (98)\\ \{Y_n\} \text{ submartingala} &\geq Y_{n-1} - M_{n-1} && (99) \end{aligned}$$

(b) $\{S_n\}$ es martingala pues $\mathbb{E}X_i = 0$. Como la función $\phi(x) = x^2$ es convexa, entonces $\{S_n^2\}$ es submartingala. Observar que,

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^2|F_n) = \mathbb{E}(S_n^2 + 2X_{n+1}S_n + X_{n+1}^2|F_n) = S_n^2 + \mathbb{E}(X_{n+1}^2) \quad (100)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} A_n &= S_n^2 - \left(S_0^2 + \sum_{i=1}^{n} (S_k^2 - \mathbb{E}(S_k^2|F_{k-1})) \right) && (101)\\ &= S_n^2 - \left(S_0^2 + \sum_{i=1}^{n} (S_k^2 - S_{k-1}^2 - \mathbb{E}(X_k^2)) \right) && (102)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_k^2) && (103) \end{aligned}$$

14 Ejercicio 12

Sean $\{X_i\}$ v.a. i.i.d. con densidad $p(x)$, y sea $h(x)$ tal que

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x+y)p(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (104)$$

Demostrar que $\{h(x + X_1 + ... + X_n)\}_n$ es una martingala.

Solución

Observar que la densidad condicional de X_{n+1} dado $F_n = (X_1, ..., X_n)$, en este caso sería simplemente $p(x)$, pues las variables son independientes. Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(h(S_{n+1})|F_n) &= \int_{\mathbb{R}} h(x + X_1 + ... + X_n + y)p(y)dy && (105)\\ &= h(x + X_1 + ... + X_n) = h(S_n) && (106) \end{aligned}$$

15 Ejercicio 13

Sean τ, σ dos tiempos de parada con respecto a $\{F_n\}$, y $N \in \mathbb{Z}^+$. Determinar si son tiempos de parada las variables aleatorias siguientes: (a) $\tau + N$, (b) $\tau - N$, (c) $\max(\tau, \sigma)$, (d) $\min(\tau, \sigma)$, (e) $\tau + \sigma$.

Solución

(a) Es un tiempo de parada: si $n \geq N$,

$$1_{\tau+N=n} = 1_{\tau=n-N}, \tag{107}$$

y por definición de τ se expresa como función de F_{n-N}, y además, como función de F_n. Si $n < N$, $\{\tau + N = n\} = \emptyset$ y por lo tanto también se expresa como función de F_n.

(b) No es un tiempo de parada: si $n \geq N$,

$$1_{\tau-N=n} = 1_{\tau=n+N}, \tag{108}$$

y por definición de τ se expresa como función de F_{n+N}, y no necesariamente como función de F_n.

(c) Es un tiempo de parada:

$$1_{\max(\tau,\sigma)=n} = 1_{\{\tau=n,\sigma<n\}\cup\{\sigma=n,\tau\leq n\}} = 1_{\{\tau=n,\sigma<n\}} + 1_{\{\sigma=n,\tau\leq n\}} \tag{109}$$

donde cada una de las indicatrices se escribe como función de F_n.

(d) Es un tiempo de parada:

$$1_{\min(\tau,\sigma)=n} = 1_{\{\tau=n,\sigma>n\}\cup\{\sigma=n,\tau\geq n\}} = 1_{\{\tau=n,\sigma>n\}} + 1_{\{\sigma=n,\tau\geq n\}} \tag{110}$$

donde cada una de las indicatrices se escribe como función de F_n.

(e) Es un tiempo de parada:

$$1_{\tau+\sigma=n} = \sum_{k=0}^{n} 1_{\{\tau=k,\sigma=n-k\}}, \tag{111}$$

donde cada una de las indicatrices se escribe como función de F_n.

16 Ejercicio 14

Sea $\{X_i\}$ una martingala adapatada a $\{F_n\}$, y sean $\leq 0\sigma \leq \tau \leq N$ dos tiempos de parada, con N natural fijo. Demostrar: (a) $\mathbb{E}(X_\tau|F_\sigma) = X_\sigma$, (b) $\mathbb{E}X_0 = \mathbb{E}X_\sigma = \mathbb{E}X_\tau = \mathbb{E}X_N$.

Solución

Asumiendo la parte (a), la parte (b) es inmediata,

$$\mathbb{E}(X_\sigma) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\tau|F_\sigma)) = \mathbb{E}(X_\tau), \tag{112}$$

y usamos la versión del teorema demostrado en el libro.

Para la parte (a), recordar que

$$X_\tau = \sum_{j=1}^{N} X_j 1_{\tau=j}, \tag{113}$$

asi que calculamos aplicando la definición de esperanza conidcionada.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(1_{F_\sigma\in I} X_\tau\right) &= \mathbb{E}\left(1_{F_\sigma\in I} \sum_{j=1}^{N} X_j 1_{\tau=j}\right) && (114)\\ &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{j} \mathbb{E}\left(1_{F_\sigma\in I} 1_{\sigma=k} X_j 1_{\tau=j}\right), && (115) \end{aligned}$$

donde usamos que $\sigma \leq \tau$, y por lo tanto los índices que recorre σ para cada j solo van hasta j. Continuamos, usando la fórmula de esperanza total,

$$\mathbb{E}\left(1_{F_\sigma \in I} X_\tau\right) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{j} \mathbb{E}(\mathbb{E}\left(1_{F_\sigma \in I} 1_{\tau=j} 1_{\sigma=k} X_j | F_k)\right)) \tag{116}$$

$$\tag{117}$$

ahora bien, $1_{F_\sigma \in I} 1_{\tau=j} 1_{\sigma=k} = 1_{\{F_\sigma \in I\} \cap \{\tau=j\} \cap \{\sigma=k\}}$, por lo que se puede escribir como función de F_k. Entonces,

$$\mathbb{E}\left(1_{F_\sigma \in I} X_\tau\right) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{j} \mathbb{E}\left(1_{F_\sigma \in I} 1_{\tau=j} 1_{\sigma=k} \mathbb{E}(X_j | F_k)\right) \tag{118}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{j} \mathbb{E}\left(1_{F_\sigma \in I} 1_{\tau=j} 1_{\sigma=k} X_k\right) \tag{119}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}\left(1_{F_\sigma \in I} 1_{\tau=j} X_\sigma\right), \tag{120}$$

donde usamos que X_k martingala y la definición de X_σ. Finalmente, sumando en j,

$$\mathbb{E}\left(1_{F_\sigma \in I} X_\tau\right) = \mathbb{E}\left(1_{F_\sigma \in I} X_\sigma\right) \tag{121}$$