Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2023

Práctico 3: Ejercicios de examen de forma de Jordan.

En este práctico se recopilan ejercicios de examen sobre forma de Jordan de diferentes universidades.

1. Este ejercicio es de un examen de la UdelaR de 2022.

   Sean $T, S : V \to V$ transformaciones lineales de un espacio vectorial complejo V de dimensión d que conmutan, es decir, $T \circ S = S \circ T$.

   a) Sea λ un valor propio de T y $E_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id})$ su espacio propio asociado. Mostrar que existe $u \in E_\lambda \setminus \{0\}$ que es vector propio de S.

   b) Mostrar con un ejemplo que puede ser vector propio con valor propio diferente.

   c) Dar un ejemplo que muestre que algún vector de E_λ puede no ser vector propio de S.

   d) Mostrar que si T tiene d-valores propios diferentes, entonces existe una base en la cual tanto T como S son diagonales.

2. Este ejercicio es de un examen de la UdelaR de 2022.

   Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

   a) Hallar los valores propios y los subespacios propios correspondientes.

   b) Probar que A es diagonalizable.

   c) Hallar una matriz diagonal D y una matriz invertible Q tales que $A = QDQ^{-1}$.

3. Este ejercicio es de un examen de la UdelaR de 2023.

   Sea T una transformación lineal de un espacio vectorial real V de dimensión finita en sí mismo.

   a) Para $\lambda \in \mathbb{R}$ definir el subespacio propio generalizado W_λ.

   b) Supongamos que el polinomio característico de T es $\chi_T(t) = \pm(t-\lambda_1)^{n_1} \cdots (t-\lambda_h)^{n_h}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

      1) Probar que $\chi_{T_{|W_{\lambda_1}}} = \pm(t - \lambda_1)^r$, con $1 \leq r \leq n_1$. Concluir que $\dim(W_{\lambda_1}) \leq n_1$.

      2) Probar que $W_{\lambda_1} = \ker(T - \lambda_1 I)^{n_1}$ donde I es la identidad de V en V.

4. Este ejercicio es de un examen de la UdelaR de 2023.

   Sea $T : V \to V$ una transformación lineal de un espacio vectorial real de dimensión finita.

   a) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Definir que significa que λ sea *valor propio*, definir *multiplicidad algebraica* y *multiplicidad geométrica* de λ.

   b) Dar ejemplos (justificando las afirmaciones) de:

      1) Una transformación sin valores propios.

      2) Una transformación para la cual la multiplicidad geométrica y algebráica de todo valor propio coincide.

3) Una transformación para la cual algún valor propio tenga multiplicidad geométrica menor al la algebraica.

5. Este ejercicio es de un examen de la universidad de Princeton de 2005.

   Un endomorfismo de un espacio vectorial complejo de dimensión 4 tiene 1 y 2 como únicos autovalores.

   a) Exhibir las 10 formas de Jordan posibles.

   b) ¿Para cuántas de ellas hay sólamente dos vectores propios linealmente independientes?

6. Este ejercicio es de un examen de la universidad de Princeton de 2005.

   Supongamos que un endomorfismo de un espacio vectorial real o complejo cumple $T^m = 0$.

   a) Mostrar que T tiene un único autovalor.

   b) Mostrar que $T + I$ es invertible.

7. Este ejercicio es de un examen de la universidad de Chicago de 2018.

   Calcular el polinomio característico, los valores propios, y los subespacios propios y propios generalizados de la matriz
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Verificar el teorema de Cayley-Hamilton mediante calculo directo en este ejemplo.

8. Este ejercicio es de un examen de la universidad de Chicago de 2018.

   Considerar la transformación $D : V \to V$ que envía un polinomio de coeficientes complejos y grado menor o igual a 3 a su derivada.

   a) Mostrar que V es isomorfo como espacio vectorial a $\mathbb{C}^n$ para algún n eligiendo una base explícita.

   b) Escribir la matriz asociada a D en la base elegida.

   c) Calcular el polinomio característico de D.

   d) Calcular los valores propios.

9. Este ejercicio apareció en la prueba de ingreso a l'École Normale Superieur (Francia) en 2021. Algunos estudiantes preparan esta prueba durante uno o dos años luego de egresar del liceo. Los que aprueban pueden acceder a realizar estudios de grado en muy buenas instituciones y con beca.

   En este ejercicio A es una matriz compleja $d \times d$.

   El radio espectral de A se define como
$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es valor propio de } A\}.$$
   La norma de un vector $x = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{C}^n$ se define como
$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2},$$
   y la norma de la matriz A se define como
$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Se pueden usar sin demostración en este ejercicio las propiedades

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

y $\|tA\| = |t|\|A\|$ para todo par de matrices cuadradas A, B y todo $t \in \mathbb{C}$.

a) Usando el teorema de Cayley-Hamilton demostrar que

$$\|A^d\| \leq \sum_{k=1}^{d} \binom{d}{k} \rho(A)^k \|A^{d-k}\|,$$

donde $\binom{d}{k}$ son las combinaciones de d tomadas de a k.

10. Este ejercicio apareció en un examen de MIT del año 2010.

    Supongamos que x_k es la proporción de estudiantes de MIT que en el año k que prefieren Cálculo a Álgebra lineal y el restante $y_k = 1 - x_k$ prefieren Álgebra lineal a Cálculo.

    El año $k+1$, $\frac{1}{5}$ de los que preferían Cálculo cambian de idea, y $\frac{1}{10}$ de los que preferían Álgebra lineal cambian de idea (posiblemente debido a este examen).

    a) Crear la matriz A tal que
    $$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$$
    y calcular el límite de $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $n \to +\infty$.

    b) Resolver empezando en $x(0) = 1, y(0) = 0$ la ecuación diferencial
    $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y \end{cases}$$

    c) ¿Para qué condiciones iniciales $x(0), y(0)$ se cumple que la solución $(x(t), y(t))$ pertenece a una única recta de $\mathbb{R}^2$ para todo t?

11. Este ejercicio apareció en un examen de Princeton del año 2002.

    Determinar todas las formas de Jordan posibles de una transformación cuyo polinomio característico es $(x-2)^3(x-1)^2$.

12. Este ejercicio apareció en un examen de Princeton del año 2002.

    Mostrar que toda matriz compleja 3×3 que cumple $A^3 = A$ es diagonalizable.

13. Este ejercicio apareció en un examen de Princeton del año 2002.

    ¿Es verdad que toda matriz compleja 4×4 que cumple $A^3 = A$ es diagonalizable?

14. Este ejercicio apareció en un examen de la universidad de Berkeley del año 1996.

    Sean V un espacio vectorial complejo de dimensión finita, $T : V \to V$ lineal, y
    $$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$
    un polinomio de coeficientes complejos.

a) Mostrar que si λ es valor propio de T entonces $p(\lambda)$ es valor propio de $p(T)$.

b) Mostrar que si μ es valor propio de $p(T)$ entonces $\mu = p(\lambda)$ para cierto valor propio λ de T.

15. Este ejercicio apareció en un examen de la universidad de Berkeley del año 2002.

    a) Calcular los vectores y valores propios de $\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

    b) Calcular una matriz Q tal que $Q^{-1}AQ$ y $Q^{-1}BQ$ sean diagonales simultáneamente donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Este ejercicio apareció en un examen de la universidad de Berkeley del año 1995.

    Sea T un operador de un espacio vectorial de dimensión finita y λ un valor propio de T.

    Supongamos que T el subespacio propio generalizado K_λ tiene una base $\{x_1, \ldots, x_9\}$ con diagrama de puntos

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & \cdot & x_5 & \cdot & x_8 & \cdot & x_9 & \cdot \\ x_2 & \cdot & x_6 & \cdot & & & & \\ x_3 & \cdot & x_7 & \cdot & & & & \\ x_4 & \cdot & & & & & & \end{array}$$

    a) Escribir fórmulas indicando la acción de T en K_λ en términos de esta base. (Si no estás seguro, puede servir empezar con la acción de $T - \lambda I$)

    b) Dar el diagrama de puntos de una base de Jordan de la restricción de T a $\ker((T - \lambda I)^2) \subset K_\lambda$ nombrando los elementos de la base.

    c) Dar el diagrama de puntos de una base de Jordan para la restricción de T a $(T - \lambda)^2(K_\lambda)$, de nuevo nombrando los elementos de la base usada.

17. Este ejercicio apareció en un examen de la universidad de Berkeley del año 1995.

    Sea T un operador lineal de un espacio vectorial de dimensión finita V, y W un subespacio T-invariante. Mostrar que el polinomio minimal de $T_{|W}$ divide al polinomio minimal de T.