Centro de Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Introducción a los Sistemas Dinámicos
Curso 2023

Repartido teórico. Sistemas Expansivos

Sea[1] X un espacio métrico compacto. Decimos que un homeomorfismo $f : X \to X$ es *α-expansivo* con $\alpha > 0$ si se cumple que para todo $x \neq y$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \alpha$. Equivalentemente, si se cumple que $d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ implica que $x = y$.

Decimos que un homeomorfismo es *expansivo* si es α-expansivo para algún $\alpha > 0$ al cual llamamos *constante de expansividad.*

Algunos ejemplos son el *shift*, la acción de un automorfismo lineal hiperbólico del toro (por ejemplo, el generado por las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$). También, todo subconjunto compacto invariante de un homeomorfismo expansivo nos da, vía la restricción un ejemplo de un sistema expansivo. Naturalmente, todo homeomorfismo de un espacio topológico finito es expansivo.

Observación 0.1. Si $f : X \to X$ es expansivo y $\mathrm{Per}_n(f) = \{p \in X \ ; \ f^i(p) = p \text{ con } 1 \leqslant i \leqslant n\}$ entonces se cumple que $\sharp \mathrm{Per}_n(f) < \infty$. (Ejercicio.)

1. Convexidad

Las siguientes propiedades clave de un homeomorfismo expansivo fueron tomadas de un trabajo de R. Mañé[2] (Expansive homeomorphisms and topological dimension, Transactions AMS (1979)). Estas propiedades fueron probadas con el objetivo de entender la dimensión de espacios admitiendo homeomorfismos expansivos. No haremos esas pruebas pues requerirían discutir el concepto de dimensión, pero estos resultados dan un sabor de las consecuencias de la expansividad.

Lo primero es una propiedad elemental de convexidad de la distancia, dice que si dos puntos muy cercanos se alejan una cierta distancia comparable a la constante de expansividad, entonces no puede acercarse hasta no haber superado la constante de expansividad:

[1]Estas notas informales fueron redactadas por R. Potrie en Setiembre 2023 como complemento al curso de Sistemas Dinámicos. No fueron revisadas. Se sugiere fuertemente leer la monografía 'Dinámica de los homeomorfismos expansivos' de J. Lewowicz (IMCA, 2003) cuyo texto y autor es motivación de quién escribe estas notas.

[2]Destacadísimo matemático uruguayo que realizó su carrera en el IMPA, Brasil. Recomiendo googlearlo.

Lema 1.1. *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo α-expansivo. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ y se cumple que*

$$\sup\{d(f^i(x), f^i(y)) \ : \ 0 \leqslant i \leqslant n\} \in (\alpha/2, \alpha),$$

entonces, se tiene que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

Demostración. La prueba es por contradicción. Si no fuese cierto el resultado, tomando $\delta = 1/n$ encontraríamos puntos x_n, y_n y tiempos $\ell_n < m_n$ con las siguientes propiedades:

- $d(x_n, y_n) \leqslant 1/n$, $d(f^{m_n}(x_n), f^{m_n}(y_n)) \leqslant 1/n$
- $d(f^{\ell_n}(x_n), f^{\ell_n}(y_n)) > \alpha/2$,
- $d(f^i(x_n), f^i(y_n)) < \alpha$ para todo $0 \leqslant i \leqslant m_n$.

Notar que por continuidad de f, se tiene que cumplir que tanto ℓ_n como $m_n - \ell_n$ tienden a infinito.

Tomando subsucesiones, podemos suponer que $f^{\ell_n}(x_n) \to z$ y $f^{\ell_n}(y_n) \to w$. Como $d(f^{\ell_n}(x_n), f^{\ell_n}(y_n)) \in (\alpha/2, \alpha)$ tenemos que $d(z, w) \in [\alpha/2, \alpha]$ en particular $z \neq w$. Por otra parte, se cumple que para todo $k \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$d(f^k(z), f^k(w)) = \lim_n d(f^{\ell_n+k}(x_n), f^{\ell_n+k}(y_n)),$$

que como ℓ_n y $m_n - \ell_n \to \infty$ tenemos que para n grandes se tiene que $\ell_n + k \in [0, m_n]$ y por lo tanto el límite está en $[0, \alpha]$. Esto contradice la expansividad y concluye la prueba. $\square$

Una propiedad similar afirma que el tiempo que lleva en separar dos puntos para un expansivo es uniforme (notar que puede ser tanto al pasado como al futuro).

Lema 1.2. *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo α-expansivo. Para todo $\delta > 0$ existe $N := N(\delta)$ que cumple que si $d(x, y) \geqslant \delta$ entonces:*

$$\sup\{d(f^i(x), f^i(y)) \ : \ |i| < N\} > \alpha.$$

Demostración. Nuevamente procedemos por contradicción. Si la propiedad es falsa, existen puntos x_n, y_n con $d(x_n, y_n) \geqslant \delta$ y de forma tal que

$$\sup\{d(f^i(x_n), f^i(y_n)) \ : \ |i| < n\} \leqslant \alpha.$$

Tomando subsucesiones, podemos suponer que $x_n \to z$ y que $y_n \to w$, que nuevamente es fácil ver que se cumple $z \neq w$ pues $d(z, w) \geqslant \delta > 0$. Ahora, para todo $k \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$d(f^k(z), f^k(w)) = \lim_n d(f^k(x_n), f^k(y_n)),$$

pero si $n > |k|$ se cumple que por hipótesis $d(f^k(x_n), f^k(y_n)) \leqslant \alpha$ y por lo tanto deducimos que $d(f^k(z), f^k(w)) \leqslant \alpha$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ lo cual contradice la expansividad. $\square$

No haremos la prueba, pero referimos al artículo mencionado por una prueba de los siguientes resultados:

Teorema 1.3 (Mañé)**.** *Si $f : X \to X$ es expansivo entonces la dimensión topológica de X es finita. Además, si f es minimal, entonces X es totalmente disconexo (equivalentemente, si X contiene un conexo no trivial, entonces no es minimal).*

Si vale la pena comentar la prueba del segundo punto

Esbozo de la prueba de la segunda afirmación. Asumiremos que f es α-expansivo para algún $\alpha > 0$ y supongamos que existe $C \subset X$ un conexo no trivial. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que tiene diámetro $\delta \ll \alpha/10$.Usando el Lema 1.2 podemos ver que existe N uniforme tal que para algún $-N \leqslant k \leqslant N$ se cumple que $\operatorname{diam}(f^k(C)) \in [5\delta, \alpha/2]$. Haremos la simplificación[3] de suponer que $k = N$.

Fijamos entonces un abierto U de diámetro muy pequeño, mucho menor que δ.

Podemos suponer entonces que $f^k(C) = f^N(C)$ (por nuestra simplificación) contiene un compacto conexos C_1 con diámetro δ y disjunto de U. $\hat{C}_1 = f^{-N}(C_1)$. Iterando este proceso, obtenemos una sucesión encajada de compactos conexos $\hat{C}_n \subset \hat{C}_{n-1} \subset \ldots C$ que cumplen que para todo $i > 0$ se tiene que $f^{iN}(\hat{C}_n) \cap U = \emptyset$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. La intersección $\hat{C}_\infty$ cumple entonces que $f^{iN}(\hat{C}_\infty) \cap U = \emptyset$. Si $x \in \hat{C}_\infty$ entonces, la clausura de su órbita por f^N no intersecta U (con lo cual f^N no puede ser minimal).

Consideramos $O = \overline{\{f^{iN}(x)\}_{i\in\mathbb{Z}}}$. Entonces ∂O, la frontera topológica de O (es decir, O menos su interior) es un cerrado con interior vacío y es f^N-invariante por ser O un conjunto f^N invariante. Se cumple que $\partial O \cup f(\partial O) \cup \ldots \cup f^{N-1}(\partial O)$ es un conjunto f-invariante cerrado, que es no vacío y no puede tampoco ser todo X por el teorema de Baire. Esto prueba que f tampoco puede ser minimal.

□

Observación 1.4. Un argumento similar también prueba que un homeomorfismo expansivo en un espacio métrico compacto con un conexo no trivial tiene *entropía topológica* positiva, concepto que no definiremos en este curso, pero invitamos a quién le interese a buscarlo en Wikipedia[4].

---

[3]Esta es una simplificación no trivial. Más adelante en las notas habrán argumentos que tienen el mismo sabor que los argumentos que permiten levantar esta suposición, pero a esta altura es una simplificación útil para poder ver cual es la idea de la prueba.

[4]Sugerencia es de usar Wikipedia en inglés que para las entradas de matemática es muy superior.

2. Expansividad al futuro

En esta sección vamos a mostrar el siguiente resultado que justifica pedir que las órbitas se separen al futuro *o* al pasado:

Teorema 2.1. *Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ un homeomorfismo tal que existe $\alpha > 0$ que cumple que para todo $x \neq y$ existe $n > 0$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \alpha$. Entonces X es un conjunto finito.*

Notar que las hipótesis implican que f es un homeomorfismo expansivo, pero son más restrictivas.

Con las mismas ideas que la sección anterior probaremos primero el siguiente resultado sumamente útil que luego volveremos a usar (notar que es un enunciado muy similar al Lema 1.2 pues ahí se muestra que si dos puntos se mantienen cerca por mucho tiempo, entonces su distancia tiene que ser muy pequeña):

Lema 2.2. *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo α-expansivo. Entonces, para todo δ existe $N > 0$ tal que si $C \subset X$ es un compacto que cumple que* $\operatorname{diam}(f^n(C)) \leqslant \alpha$ *para todo $n \geqslant 0$, entonces se cumple que si $n > N$ entonces* $\operatorname{diam}(f^n(C)) \leqslant \delta$.

Demostración. La prueba que haremos es nuevamente por contradicción. Si no fuese el caso, tendríamos un valor de $\delta < \alpha$ para el cual, dado $k > 0$ existiría un compacto C_k con $\operatorname{diam}(f^n(C_k)) \leqslant \alpha$ para todo n y de forma tal que para un valor de $j > k$ se cumple que $\operatorname{diam}(f^j(C_k)) \geqslant \delta$. Entonces, podemos encontrar pares de puntos $x_k, y_k \in f^j(C_k)$ tal que $d(x_k, y_k) \geqslant \delta$ y tal que se cumple que para todo $n > -j$ se cumple que $d(f^n(x_k), f^n(y_k)) \leqslant \alpha$. Tomando subsucesiones tenemos que $x_k \to z$ y que $y_k \to w$ y tendremos que dado $i \in \mathbb{Z}$ se cumple que $d(f^i(z), f^i(w)) = \lim_k d(f^i(x_k), f^i(y_k)) \leqslant \alpha$ contradiciendo la expansividad. □

Ahora podemos dar la demostración del Teorema 2.1,

Demostración del Teorema 2.1. Denotamos, para $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ el conjunto $B_{x,\varepsilon} = \{y \in X \ : \ d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$ que es un cerrado y por lo tanto compacto, cuyo diámetro es $\leqslant 2\varepsilon$ por la desigualdad triangular.

Afirmamos primero que en las hipótesis del teorema, se cumple que existe $\varepsilon < \alpha/2$ tal que para todo $x \in X$ se cumple que $\operatorname{diam}(f^{-n}(B_{x,\varepsilon})) \leqslant \alpha$ para todo $n > 0$. Si no fuese el caso, podemos argumentar como ya lo hemos hecho y conseguir puntos x_n, y_n con $d(x_n, y_n) < 1/n$ de forma tal que para algún $m_n > 0$ se cumple que $d(f^{-m_n}(x_n), f^{-m_n}(y_n)) > \alpha$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que m_n es el primer momento (i.e. el menor valor entero positivo) dónde se da esa desigualdad, es decir que para todo $0 \leqslant i < m_n$ se cumple que $d(f^{-i}(x_n), f^{-i}(y_n)) \leqslant \alpha$. Por continuidad de f se cumple que $m_n \to \infty$, tomando subsucesiones podemos suponer que $f^{-m_n}(x_n) \to z$ y $f^{-m_n}(y_n) \to w$ y se cumple que $d(z,w) \geqslant \alpha$ por lo tanto $z \neq w$. Ahora, se cumple que $d(f^i(z), f^i(w)) = \lim d(f^{i-m_n}(x_n), f^{i-m_n}(y_n)) \leqslant \alpha$ para todo $i \geqslant 1$ con lo cual los puntos $f(z)$ y $f(w)$ contradicen la hipótesis del teorema.

Fijemos entonces un cubrimiento de X por bolas de radio ε y consideremos un subcubrimiento finito, $B_1, \ldots, B_k$. Acabamos de ver que $\operatorname{diam}(f^{-n}(B_i)) \leqslant \alpha$ para todo $n > 0$, entonces, el Lema 2.2 aplicado a f^{-1} nos asegura que dado $\delta > 0$ existe $N > 0$ tal que se cumple que para todo $1 \leqslant i \leqslant k$ tenemos que $\operatorname{diam}(f^{-N}(B_i)) < \delta$. Notar que $f^{-N}(B_1), \ldots f^{-N}(B_k)$ sigue siendo un cubrimiento de X pues f es un homeomorfismo.

Afirmamos que esto implica que X tiene a lo sumo k puntos, en efecto, si tuviesemos puntos distintos $x_1, \ldots, x_{k+1}$ en X y denotamos δ como la mitad de la menor distancia entre esos puntos, se cumple que $f^{-N}(B_1), \ldots, f^{-N}(B_k)$ no podría ser un cubrimiento de X pues cada x_i debería estar en alguno de esos abiertos, pero ninguno de ellos puede contener más de uno de los puntos, contradiciendo el principio del palomar.

$\square$

3. Puntos estables

Decimos que un punto $x \in X$ es *Lyapunov estable* (al futuro) para $f : X \to X$ si se cumple que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f^n(B_{x,\delta}) \subset B_{f^n(x),\varepsilon}$. En el Lema 2.2 vimos en particular que si $f : X \to X$ es expansivo, y x es un punto Lyapunov estable entonces es *asintóticamente estable* en el sentido que si $d(x,y) \leqslant \delta$ entonces $d(f^n(x), f^n(y)) \to 0$.

No es difícil construir un homeomorfismo expansivo con puntos Lyapunov estables. Por supuesto un ejemplo es la identidad en un conjunto finito, pero algo ligeramente más interesante es considerar el conjunto

$$X = \{0\} \cup \{1\} \cup \left\{ \frac{e^n}{1+e^n} \right\}_{n \in \mathbb{Z}},$$

que es compacto en $[0,1]$ y donde podemos definir el homeomorfismo $f : X \to X$ que fija $\{0,1\}$ y que manda $\frac{e^n}{1+e^n} \mapsto \frac{e^{n+1}}{1+e^{n+1}}$. Esto es un homeomorfismo (chequear!) y el punto 1 es Lyapunov estable al futuro (y asintóticamente estable). Existen ejemplos más interesantes[5], en particular, existe un ejemplo donde el espacio X es *conexo*. Sin embargo, bajo hipótesis relativamente baratas, se puede probar el siguiente remarcable teorema:

Teorema 3.1 (Lewowicz). *Si X es un espacio métrico compacto conexo y localmente conexo y $f : X \to X$ es un homeomorfismo expansivo,*

[5]Ver W. Reddy, L. Robertson 'Sinks, sources and saddles for expansive homeomorphisms with cannonical coordinates' Rocky Journal of Math. (1987).

entonces X no tiene puntos Lyapunov estables a no ser que X sea un único punto.

Esto fue probado en J. Lewowicz, 'Persistence in expansive systems' Ergodic Theory and Dynamical Systems (1983). La prueba que daremos es un tanto diferente pero guarda el espíritu.

Antes de comenzar la demostración vamos a probar un resultado auxiliar que es donde la conexión local es utilizada de forma crucial.

Lema 3.2. *Sea $f : X \to X$ un homeomorfismo α-expansivo de un espacio métrico compacto y localmente conexo. Entonces, si x es un punto Lyapunov estable, entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de forma tal que para todo $n > 0$ y $z = f^{-n}(x)$ se tiene que $f^k(B_{z,\delta}) \subset B_{f^k(z),\varepsilon}$ para todo $k > 0$.*

Este lema afirma que si x es estable Lyapunov, también los son sus preimágenes (esto es inmediato), pero con constantes uniformes que no dependen de cuán al 'pasado' vayamos (esto es la clave).

Demostración. Fijamos $\varepsilon < \alpha$ y un valor δ_0 de forma tal que si $d(x, y) \leqslant \delta_0$ entonces para todo $n \geqslant 0$ se cumple que $d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant \varepsilon$ dado por la estabilidad Lyapunov de x. Ahora, probaremos por contradicción con un argumento similar a los anteriores, pero necesitaremos la conexión local para encontrar los puntos relevantes.

Supongamos que el resultado no vale, entonces, para todo $k > 0$ se cumple que existe $z_k = f^{-m_k}(x)$ de forma tal que existe un abierto conexo U_k de z_k de diámetro menor que $1/k$ de forma tal que $f^n(U_k))$ no está contenido en $B_{f^n(z),\delta_0}$ para algún $1 \leqslant n \leqslant m_k$. Notar que como $1/k \to 0$ tenemos que $m_k \to \infty$. Consideramos entonces la distancia:

$$d_{m_k}(a, b) = \max_{i=0,\dots m_k} \{d(f^i(a), f^i(b))\}.$$

Como m_k es finito, esta distancia es continua. Por hipótesis, tenemos que bajo d_{m_k} hay puntos en U_k cuya distancia a z_k mayor que δ_0 y por lo tanto, por conexión, hay un punto $y_k \in U_k$ y un iterado $1 \leqslant \ell_k \leqslant m_k$ de forma tal que $d(f^{\ell_k}(z_k), f^{\ell_k}(y_k)) = \delta_0$ mientras que $d(f^i(y_k), f^i(z_k)) \leqslant \delta_0$ para todo $0 \leqslant i \leqslant m_n$. Notar que como $f^{m_k}(z_k) = x$ tenemos que para $i \geqslant m_k$ se cumple que $d(f^i(y_k), f^i(z_k)) \leqslant \varepsilon$. Notar también que $\ell_k \to \infty$.

Entonces, considerando subsucesiones podemos suponer que $f^{\ell_k}(y_k) \to w$ y $f^{\ell_k}(z_k) \to v$ que son diferentes pues están a distancia δ_0. Tendremos que $d(f^i(w), f^i(v)) = \lim_k d(f^{i+\ell_k}(y_k), f^{i+\ell_k}(z_k)) \leqslant \varepsilon$ para todo i, contradiciendo la expansividad.

□

Ahora podemos completar la prueba.

Demostración del Teorema 3.1. Supongamos que x es un punto Lyapunov estable para f que es α-expansivo para algún $\alpha > 0$. Tomamos constantes ε, δ_0 y δ del Lema anterior. Notar que esto implica, gracias al Lema 2.2 que si $d(y, f^{-k}(x)) < \delta$ para algún valor de $k \in \mathbb{Z}$ entonces $\omega(x) = \omega(y)$ y que y es también Lyapunov estable.

Entonces, para todo $z \in \alpha(x)$ se cumple que $\omega(x) = \omega(z)$. De igual manera, esto implica que $x \in \omega(z)$ pues si $z = \lim_j f^{-n_j}(x)$ entonces $d(f^{n_j}(z), x) \to 0$ de nuevo por el Lema 2.2 y el hecho que z es Lyapunov estable. Entonces tenemos que $x \in \omega(x) \subset \alpha(x)$ (pues si $z \in \alpha(x)$ entonces $\omega(z) \subset \alpha(x)$ por ser $\alpha(x)$ compacto invariante) para todo punto estable.

Notar que $\alpha(x)$ es un compacto invariante donde todo punto es estable Lyapunov al futuro, entonces, tiene que ser expansivo al pasado, y por lo tanto finito gracias al Teorema 2.1 aplicado a f^{-1} en $\alpha(x)$ deducimos que $\alpha(x)$ y por lo tanto también $\omega(x)$ es finito. Como $x \in \omega(x)$ deducimos que todo punto Lyapunov estable es periódico.

Esto implica que x tiene que ser aislado, pues un entorno de x está conformado de puntos Lyapunov estables que comparten el omega límite con x y por lo tanto deberían ser iguales a x. Por conexión deducimos que $X = \{x\}$ $\square$

Un ejercicio desafiante es usar las ideas aquí utilizadas para mostrar que no existen homeomorfismos expansivos de S^1 (Sugerencia: Mostrar que para un expansivo en una variedad todo punto tiene que tener un conexo cuyo diámetro tienda a cero en el futuro, lo cual en el círculo da un punto Lyapunov estable.). Un teorema mucho más profundo es el siguiente[6]:

Teorema 3.3 (Lewowicz)**.** *No existen homeomorfismos expansivos de la esfera S^2.*

Para S^3 esto es un problema abierto[7].

[6]Ver J. Lewowicz, 'Expansive homeomorphisms of surfaces' Bol. Soc. Brasil Math Soc . (1989). En este trabajo también se clasifican todos los homeomorfismos expansivos de superficies, por ejemplo, en $\mathbb{T}^2$ un tal homeomorfismo es topologicamente conjugado a un automorfismo lineal.

[7]Ver sin embargo J. Vieitez, Expansive homeomorphisms and hyperbolic diffeomorphisms on 3-manifolds, Ergodic Theory and Dynamical Systems (1996).