Práctico 2

1. Probar que si $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{k})$, entonces L es un álgebra simple.

2. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{k})$:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & b+c \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{k} \right\}; \quad L_\mu = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & \mu a & \mu c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{k} \right\}, \text{ siendo } \mu \in \mathbb{k}^\times.$$

   a) Encontrar una base $\{x,y,z\}$ de L tal que $[x,y]=y$, $[x,z]=y+z$, $[y,z]=0$.

   b) Encontrar una base $\{x,y,z\}$ de L_μ tal que $[x,y]=y$, $[x,z]=\mu z$, $[y,z]=0$.

   Notar que los dos ítems anteriores prueban que L y L_μ son subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{k})$.

   c) Probar que $L_\mu \simeq L_\nu$ si y solo si $\mu = \nu^{\pm 1}$.

3. Identificar las álgebras complejas siguientes (respecto a la lista de álgebras de dimensión 3).

   a) $L = \mathfrak{b}_2(\mathbb{C})$ (matrices triangulares superiores).

   b) $L = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3_\wedge$. *Sugerencia:* hallar una base adecuada de L.

   c) $L = \mathfrak{gl}_{3,b}(\mathbb{C})$, siendo $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. *Sugerencia:* recordar el ejercicio 12 del práctico 1.

   d) $L = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$.

   e) $L_1, L_2 \subset \mathfrak{gl}_4(\mathbb{C})$, siendo $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

En los siguientes ejercicios vamos a clasificar las álgebras de Lie **reales** *de dimensión 3. Si L es un álgebra de dimensión 3 tal que* $\dim L' = 1$*, entonces sabemos que L es isomorfa al álgebra de Heisemberg* $\mathfrak{n}_3(\mathbb{R})$ *o a la suma directa de* $\mathbb{R}$ *con el álgebra de Lie real no abeliana de dimensión 2. Luego solo resta estudiar los casos* $\dim L' = 2$ *y* $\dim L' = 3$.

4. Sea $\nu \in \mathbb{R}$ y consideramos

$$L_{(\nu)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b\nu - c & a\nu & a \\ b - c\nu & -a & a\nu \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{gl}_3(\mathbb{R}).$$

   a) Probar que $L_{(\nu)}$ admite una base $\{x,y,z\}$ tal que

$$[x,y] = \nu y - z, \quad [x,z] = y + \nu z, \quad [y,z] = 0.$$

   Deducir que $L_{(\nu)}$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{R})$.

b) Sea $\{x,y,z\}$ una base de $L_{(\nu)}$ como en la parte anterior. Probar que para todo $w \in L_{(\nu)} \setminus L'_{(\nu)}$ se cumple que $\{y,z\}$ es una base de Jordan real de $L'_{(\nu)}$ respecto a $D_w : L'_{(\nu)} \to L'_{(\nu)}$, siendo D_w la restricción de $\mathrm{ad}_w : L_{(\nu)} \to L_{(\nu)}$ a $L'_{(\nu)}$.

c) Probar que $L_{(\nu)} \simeq L_{(\eta)}$ si y solo si $\nu = \pm\eta$.

5. Sea L un álgebra de Lie real de dimensión 3 tal que L' tiene dimensión 2. El objetivo de este ejercicio es probar que existe una base $\mathcal{B} = \{x,y,z\}$ de L tal que

   a) $[x,y] = y$, $[x,z] = \mu z$, $[y,z] = 0$, siendo $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   b) $[x,y] = y$, $[x,z] = y + z$, $[y,z] = 0$.

   c) $[x,y] = \nu y - z$, $[x,z] = y + \nu z$, $[y,z] = 0$, siendo $\nu \in \mathbb{R}$.

   Dado $w \in L \setminus L'$, sea $D_w : L' \to L'$ la restricción de ad_w a L'. Notar que la misma demostración del caso $\overline{\mathbb{k}} = \mathbb{k}$, sirve para probar que los casos $5a$ y $5b$ ocurren cuando existe $x \in L \setminus L'$ tal que D_x tiene algún valor propio (discutiendo según D_x sea o no diagonalizable).

   Supongamos ahora que existe $x \in L \setminus L'$ tal que D_x no tiene valores propios. Usando la forma de Jordan real de D_x, deducir que existe una base $\{y,z\}$ de L' tal que $[x,y] = ay - bz$, $[x,z] = by + az$. Modificando esta base, encontrar una base de L como en el caso $5c$.

6. Probar que las álgebras de los tres casos anteriores (ejercicio 5) no son isomorfas entre sí.

7. *a*) Probar que si $L = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ o $L = \mathbb{R}^3_\wedge$, entonces L es un álgebra simple. Esto implica $L' = L$.

   b) Estudiar la diagonalizabilidad de $\mathrm{ad}_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, para cada $x \in \mathbb{R}^3_\wedge$.

   c) Probar que las álgebras $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^3_\wedge$ no son isomorfas.

8. Sea L un álgebra de Lie real de dimensión 3 tal que $L' = L$. El objetivo de este ejercicio es probar que L es isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ o a $\mathbb{R}^3_\wedge$.

   Sabemos por la prueba del caso $\overline{\mathbb{k}} = \mathbb{k}$ que $\mathrm{ad}_x : L \to L$ tiene rango 2, para todo $0 \neq x \in L$. Además, si existe $z \in L$ tal que $\mathrm{ad}_z : L \to L$ tiene algún valor propio no nulo, entonces L es isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ (vale la misma prueba del caso $\overline{\mathbb{k}} = \mathbb{k}$). Supongamos ahora que para todo $z \in L$ se cumple que el único valor propio de $\mathrm{ad}_z : L \to L$ es cero. Fijamos $z \in L$, $z \neq 0$.

   a) Probar que la forma de Jordan real de ad_z es $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & -b & a \end{pmatrix}$, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

   b) Probar $a = 0$ (recordar $L' = L$).

   c) Deducir que existe una base $\{X,Y,Z\}$ de L tal que $[Y,Z] = X$, $[Z,X] = Y$.

   d) Calculando $[Z,[X,Y]]$ deducir que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $[X,Y] = cZ$. Probar que es $c \neq 0$.

   e) Si $c < 0$, probar que existe una base $\{x,y,z\}$ de L tal que $[x,y] = -z$, $[y,z] = x$, $[z,x] = y$. Calculando $[y, x+z]$ ver que se llega a una contradicción. Luego este caso no es posible.

   f) Si $c > 0$, probar que existe una base $\{x,y,z\}$ de L tal que $[x,y] = z$, $[y,z] = x$, $[z,x] = y$.

   g) Concluir que L es isomorfa a $\mathbb{R}^3_\wedge$.

Nota: los ejercicios 5 y 8 dan la clasificación de las álgebras de Lie reales de dimensión 3 para los casos $\dim L' = 2$ y $\dim L' = 3$. El ejercicio 4 nos da un ejemplo de un álgebra de tipo $5c$. Los ejercicios 4, 6 y 7 estudian los isomorfismos entre estas álgebras.

Dimensión 2. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 2. Las posibles *formas de Jordan reales* de $T \in \mathrm{End}(V)$ son

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \text{ si } \chi_T(t) = (t-a)(t-b),\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq b;$$

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ o } J = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ si } \chi_T(t) = (t-a)^2,\ a \in \mathbb{R};$$

$$J = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \text{ si } \chi_T(t) = (t-a)^2 + b^2,\ a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0.$$

Estas formas de Jordan son únicas, a menos del orden en el primer caso y en el último imponiendo $b > 0$. Otra forma de decir esto último, es

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \text{ y } b_1 = \pm b_2.$$

Dimensión 3. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3 y $T \in \mathrm{End}(V)$. Si $\chi_T(t)$ tiene una raíz compleja no real, entonces existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ c \neq 0.$$

siendo a la raíz real y $b \pm ci$ las raíces complejas de $\chi_T(t)$. En los otros casos el polinomio carácterístico $\chi_T(t)$ se escinde y se obtiene la forma de Jordan usual.