Práctico 2: Proceso de Wiener[1]

Decimos que un proceso aleatorio $\{X_t\}$ tiene *incrementos independientes*, cuando para cualquier elección de índices $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < s_n < t_n$, las variables aleatorias

$$X_{t_1} - X_{s_1}, X_{t_2} - X_{s_2}, \dots, X_{t_n} - X_{s_n}$$

son mutuamente independientes. Decimos que un proceso aleatorio $\{X_t\}$ tiene *incrementos estacionarios* (o también *incrementos homogéneos en el tiempo*), cuando para dos tiempos $0 \leq t < t + h$ arbitrarios, la distribución de la variable aleatoria $X_{t+h} - X_t$ no depende de t. Como el proceso parte del origen, la distribución de las variables aleatorias $X_{t+h} - X_t$ y X_h coinciden.

Definición 1 *Un proceso aleatorio* $\{W_t\}$ *es un* proceso de Wiener*, si se verifican las siguientes propiedades:*

(a) *El proceso parte del origen, es decir,* $\mathbf{P}(W_0 = 0) = 1$.

(b) *Las trayectorias de* $\{W_t\}$ *son funciones continuas.*

(c) *El proceso aleatorio* $\{W_t\}$ *tiene incrementos independientes.*

(d) *Dados* $0 \leq t < t + h$*, la variable aleatoria* $W_{t+h} - W_t$ *tiene distribución normal, con esperanza nula, y varianza* $\mathbf{var}(W_{t+h} - W_t) = h$.

1. Sea $\{W(t) \colon t \geq 0\}$ un proceso de Wiener. (a) Demostrar

$$\mathbf{E}(W(s)W(t)) = \min(s, t).$$

(b) Demostrar

$$\mathbf{E}(|W(t) - W(s)|^2) = |t - s|.$$

(c) Calcular la función característica

$$f(\lambda) = \mathbf{E}(\exp(i\lambda W(t))).$$

[1]Ernesto Mordecki, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay

2. Transformaciones del proceso de Wiener. Sea $\{W_t\}$ un proceso de Wiener. Demostrar que los siguientes procesos aleatorios son procesos de Wiener:

(a) $\{-W_t\}$;

(b) $\{\sqrt{c}W_{t/c}\}$, donde $c > 0$;

(c) $\{W_{T+t} - W_T\}$, donde $T > 0$.

3. Trayectorias del Proceso de Wiener. El siguiente ejercicio muestra que las trayectorias de un proceso de Wiener presentan un comportamiento diferente al de las funciones diferenciables: su variación en un intervalo $[0, T]$ no existe, es infinita; y su variación cuadrática en un intervalo $[0, T]$ es igual a T. Consideremos con ese fin, para cada N, la partición diádica $\{t_0^N = 0, t_1^N = 1/2^N, \dots, t_{2^N}^N = 1\}$.
(a) Demostrar que se verifica:

$$V_N = \sum_{k=1}^{2^N} \left| W_{t_k^N} - W_{t_{k-1}^N} \right| \to \infty \quad (N \to \infty) \quad c.s.$$

Sugerencias: (i) Demostrar que $V_N(\omega) \leq V_{N+1}(\omega)$ y concluir que existe el límite (casi seguro) de $\{V_N\}$. (ii) Estudiar el límite en probabilidad de V_N y utilizar la unicidad del límite en probabilidad.
(b) Demostrar que se verifica:

$$Q_N = \sum_{k=1}^{2^N} \big(W_{t_k^N} - W_{t_{k-1}^N} \big)^2 \to T \quad (N \to \infty)$$

en media cuadrática, es decir demostrar que

$$\mathbf{E}\big(Q_N - T\big)^2 \to 0 \quad (N \to \infty) \tag{1}$$

Sugerencia: considerar las variables $Y_k = \big(W_{t_k^N} - W_{t_{k-1}^N} \big)^2 - (t_k^N - t_{k-1}^N)$, observar que $Q_N - T$ es la suma de las Y_k, y calcular el segundo momento en (1).

4. Puente browniano. Sea considera el proceso aleatorio definido mediante

$$B_t = W_t - tW_1 \qquad (0 \leq t \leq 1), \tag{2}$$

denominado *puente browniano*, donde $\{W_t\}$ es un proceso de Wiener. Demostrar que $\mathbf{P}(B_0 = 0) = \mathbf{P}(B_1 = 0) = 1$, $\mathbf{E}B_t = 0$, $\mathbf{E}B_sB_t = s(1-t)$ si $0 \leq s \leq t \leq 1$. Demostrar que el proceso $\{B_{1-t}\}_{0\leq t\leq 1}$ es un puente Browniano, es decir, existe un proceso de Wiener tal que se verifica (2).

5.Regresión gaussiana (a) Sea (X, Y) un vector gaussiano. Para calcular

$$\mathbf{E}(Y \mid X)$$

se suma y resta αX y se determina α de forma que $Y + \alpha X$ y X sean independientes. Hallado tal α, se tiene

$$\mathbf{E}(Y \mid X) = \mathbf{E}(Y + \alpha X - \alpha X \mid X) = \mathbf{E}(Y + \alpha X) - \alpha X.$$

Calcular entonces α.

(b) Calcular

$$\mathbf{E}(W(s) \mid W(t)), \quad 0 \leq s \leq t.$$

6. Sean $\{W_t\}$ un proceso de Wiener, y $0 \leq s_1 < t_1 < \cdots < s_n < t_n$ tiempos arbitrarios.
(a) Demostrar que $|W_{s_1}|, |W_{t_1} - W_{s_1}|, \ldots, |W_{t_n} - W_{s_n}|$ son variables aleatorias independientes.
(b) Demostrar que $W_{s_1}^2, (W_{t_1} - W_{s_1})^2, \ldots, (W_{t_n} - W_{s_n})^2$ son variables aleatorias independientes.

7. Propiedades de martingala. Sea $\{W_t\}$ un proceso de Wiener. Calcular las siguientes esperanzas condicionales, dado $0 \leq s < t$.

(a) $\mathbf{E}(W_t \mid W_s) = W_s$;

(b) $\mathbf{E}\big(W_t^2 - t \mid W_s\big) = W_s^2 - s$.

(c) $\mathbf{E}(\exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2) \mid W_s) = \exp(\sigma W_s - \sigma^2 s/2)$.

8. (a) Demostrar que el proceso de Wiener con tendencia $\{X_t\}$ dado por

$$X_t = W_t + at, \quad t \geq 0,$$

tiene incrementos independientes y estacionarios. (b) Calcular la densidad de la variable aleatoria $M_T = \max_{0\leq t\leq T} X_t$.

9. Principio de reflexión. (a) Demostrar que si

$$A(x,t) = \Phi\big((x-x_0)/\sqrt{T-t}\big), \quad x \text{ real}, \ t \in [0,T),$$

se verifica la propiedad

$$\mathbf{E}\big(A(W_t,t) \mid W_t\big) = A(W_s,s),$$

donde $0 \le s < t < T$.

(b) Utilizando la fórmla de (a) dar una demostración directa de la fórmula

$$\mathbf{P}\Big(\max_{0\le t\le T} W_t > x_0\Big) = 2\Phi\Big(\frac{-x_0}{\sqrt{T}}\Big) = 2\mathbf{P}(W_T \ge x_0). \tag{3}$$

10. Verificar la segunda parte del Lema 10.2 de [1], correspondiente a la función $A_2(x,t)$.

11. Consideremos el proceso aleatorio $\{X\}_{t\ge 0}$, donde $X_t = \sigma W_t + at$ $(t \ge 0)$, con a y $\sigma > 0$ constantes reales. La constante σ se llama *coeficiente de difusión*. Obtener fórmulas para $\mathbf{P}\big(\max_{0\le t\le T} X_t(\omega) > x_0\big)$, y para $\mathbf{P}(\tau_1 < \tau_2)$, para este proceso aleatorio, donde

$$\tau_1 = \inf\{t \ge 0 \colon X_t > x_0\}, \qquad \tau_2 = \inf\{t \ge 0 \colon X_t < y_0\}.$$

12. Consideremos un proceso de Wiener $\{W_t\}$, y dos constantes $y_0 < 0 < x_0$. Definimos $\tau_1 = \inf\{t \ge 0 \colon W_t > x_0\}$, $\tau_2 = \inf\{t \ge 0 \colon W_t < y_0\}$. Calcular $\mathbf{P}(\tau_1 < \tau_2)$.

13. Ley fuerte de los grandes números Demostrar que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0, \quad c.s.$$

Simulación

14. Brownian motion. Plot a large number of trajectories of a Brownian motion $\{W(t)\}$ in an interval $[0,1]$. Observe the behavior close to $t = 0$. On the same plot, add the curves $y(t) = \sqrt{2t}$ with a different color. Find a good scale of the axis, conjecture the value of:

$$\ell = \lim_{t \to 0} \frac{W(t)}{\sqrt{2t}}, \, a.s.$$

(As a consequence of the *Law of the iterated logarithm* we get that $\ell = 0$.)

15. Properties of the trajectories. Given a BM $\{W(t) \colon t \geq 0\}$ and $n \in \mathbb{N}$ we define the discrete time random processes, depending on $q = 1, 2, 3$, by

$$V_n^q(k) = \sum_{i=1}^{k} |W(i/2^n) - W((i-1)/2^n)|^q \,, \quad \text{for } k = 0, \ldots, 2^n.$$

(a) We want to establish the limit behavior for $q = 1, 2, 3$:

$$\lim_{n \to \infty} V_n^q(2^n) \quad \text{when } n \to \infty.$$

For this purpose, plot trajectories of the processes $\{V_n^q(k) \colon 0 \leq k \leq 2^n\}$ for $q = 1, 2, 3$ and $5 \leq n \leq 12$. To see all the values, use first the command `plot` with `ylim=c(0,10)` and the use the command `lines`.
(b) Based on your simulations, conjecture the limits for $q = 1, 2, 3$ and compute the expectations $\mathbf{E}(V_n^q(2^n))$ to support your conjecture.

16. Brownian bridge. Remembre that if $\{W(t) \colon 0 \leq t \leq 1\}$ is a Brownian motion, then

$$R(t) = W(t) - tW(1), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

is a Brownian bridge.
(a) Write a code to simulate trajectories of a Brownian bridge $\{R(t) \colon 0 \leq t \leq 1\}$. Plot several trajectories of this process.
(b) Use this code to determine the density of the random variable

$$K = \max_{0 \leq t \leq 1} |R(t)|.$$

and estimate $\mathbf{E}(K)$ and $\mathbf{var}(K)$.
(d) Determine the level k_0 such that

$$\mathbf{P}(K \geq k_0) = 0.05.$$

(Use the command `quantile`. True value: $k_0 = 1.36$).

17. *Testing the random number generator.* Kolmogorov Theorem on the empirical distribution states that

$$K_n := \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbf{R}} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{d} K.$$

We assume that our random number generator `runif` gives independent and identically distributed random variables, we want to test whether this random variables are uniform. To perform this test:

(a) Given a sample $X_1, \dots, X_n$, prove that

$$k_n = \sqrt{n} \sup_{0 \leq x \leq 1} |F_n(x) - x| = \sqrt{n} \max\{|X_k - (k-1)/n|, |X_k - k/n| \colon k = 1, \dots, n\}.$$

(b) Given a sample generated by `runif(n)`, compute the statistic k_n

(c) Plot in the same window, for $0 \leq x \leq 1$, the functions $F_n(x)$ for the obtained sample, and the uniform distribution $F(x) = x,\ 0 \leq x \leq 1$.

(d) If this statistic is larger than k_0 computed in the previous exercise, you have ground to suspect that your generator does not produce truly uniform variables, with a confidence of 95%.

(e) You can check your results with `ks.test`.

18. Options prices: Black-Scholes model. The price of a Call option written on an asset S is computed through the formula

$$C = C(r, \sigma, K, T) = e^{-rT} \mathbf{E}(S_T - K)^+,$$

where $S_T = S_0 \exp(\sigma \mathcal{N}(0, T) + (r - \sigma^2/2)T)$. Black and Scholes (1973) gave a formula to compute this value:

$$C(r, \sigma, T, K) = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2),$$

$$d_{1,2} = \frac{\log(S_0/K) + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma \sqrt{T}}.$$

where Φ is the cumulative normal standard distribution.

(a) Write a code to compute the price of a call option according to Black-Scholes formula.

(b) Consider the corresponding values:

$$S_0 = 4930, \quad r = 0.01, \quad T = 1/12, \quad \sigma = 0.20.$$

and plot the option values as a function of K in an interval $[4000, 6000]$

(c) Compute the option value with the formula and with simulation when $K = S_0$ (option at the money), and check if the true value lies in the corresponding confidence interval.

19. Asian options. Consider the Geometric Brownian motion

$$S(t) = S(0)e^{\sigma W(t) + \mu t}.$$

We want to price an Asian option

$$A(r, \sigma, T, K) = e^{-rT}\mathbf{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(r)dr - K\right)^+$$

in case the parameters are

$$r = 0.08, \quad S_0 = K = 1, \quad \sigma = 0.4, \quad T = 1, \quad \mu = r - \frac{\sigma^2}{2} = 0.$$

So, simulate trajectories of a Geometric Brownian motion, compute the integrals, and give an estimation of

$$A = e^{-0.08}\mathbf{E}\left(\int_0^1 e^{0.1W(t)}dt - 1\right)^+$$

for the given parameters with the corresponding error of estimation.

References

[1] Petrov-Mordecki. Teoría de la Probabilidad. Dirac. 2023. Facultad de Ciencias