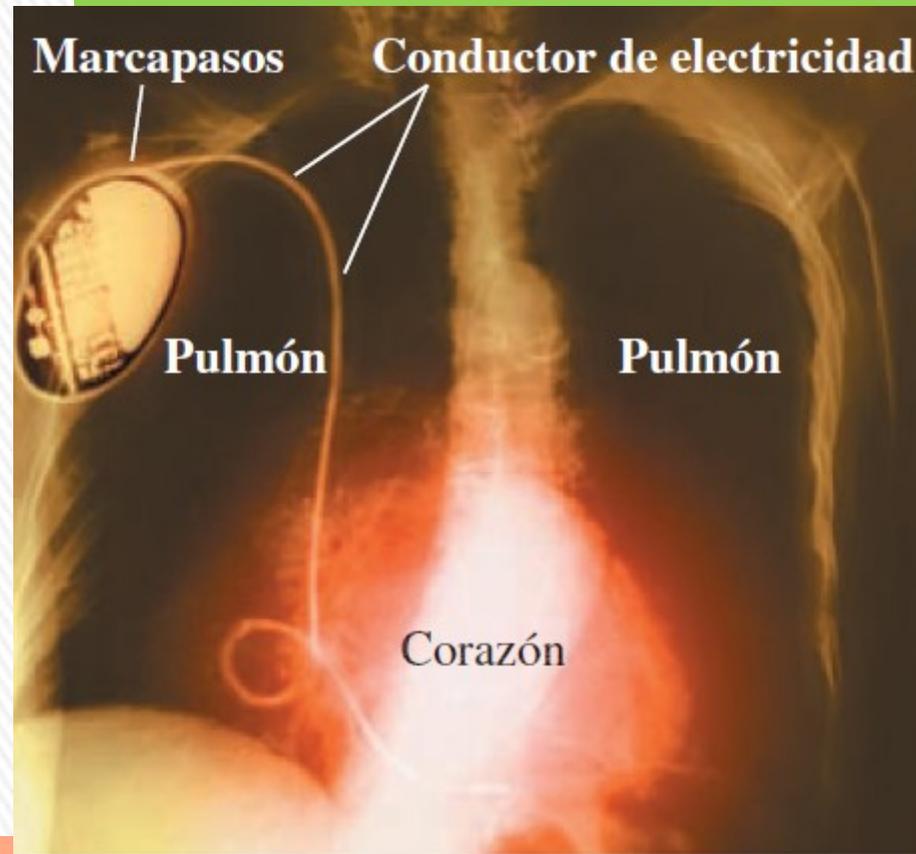


## 9 - CIRCUITOS RC



**Marcapasos y capacitores** La radiografía muestra un marcapasos implantado en un paciente con problemas en el nódulo sinoatrial, la parte del corazón que genera la señal eléctrica que provoca los latidos del corazón. El circuito del marcapasos contiene una batería, un capacitor y un interruptor controlado por computadora.

Para mantener los latidos regulares, el interruptor descarga el capacitor una vez por segundo y envía un pulso eléctrico al corazón. Luego, el interruptor se abre para permitir la recarga del capacitor para el siguiente pulso.

# CIRCUITOS RC

En los circuitos en que las fem y las resistencias son **constantes** (no varían con el tiempo), los potenciales, corrientes y potencias también son independientes del tiempo.

Pero en la carga o descarga de un capacitor se tiene una situación en la que las corrientes, los voltajes y las potencias **cambian con el tiempo**.

Muchos dispositivos incorporan circuitos en los que un capacitor se carga y descarga consecutivamente: semáforos intermitentes, luces de emergencia de los automóviles y unidades de flash electrónico, marcapasos...

Realizaremos algunos desarrollos matemáticos: planteamiento de una ecuación diferencial para un circuito RC y la resolveremos, con carácter demostrativo.

El uso de estos métodos matemáticos no serán requeridos en las evaluaciones.



# CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

Circuito con resistor y capacitor en serie:

## **circuito R-C.**

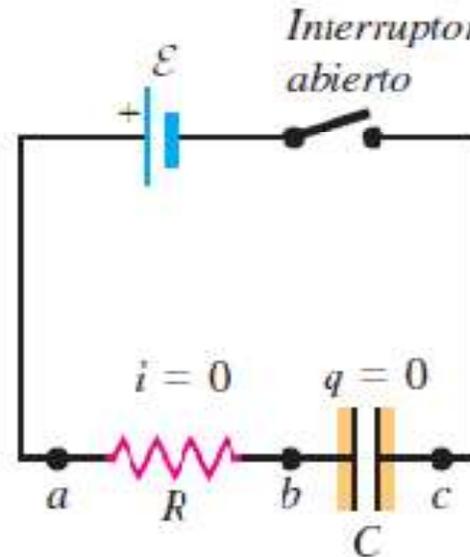
Batería ideal fem  $\mathcal{E}$  constante ( $r = 0$ ) y se desprecia la resistencia de todos los conductores de conexión, salvo el resistor  $R$ . Inicialmente capacitor descargado, en  $t = 0$ , cierro el interruptor.

Circula la corriente alrededor y comienza a cargar el capacitor.

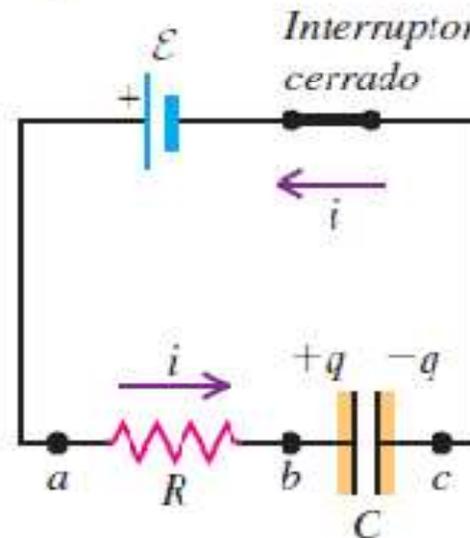
Como el capacitor en  $t = 0$  está descargado, la diferencia de potencial  $v_{bc} = 0$ , y el voltaje  $v_{ab}$  a través del resistor  $R$  es igual a la fem  $\mathcal{E}$ ; y la corriente inicial a través del resistor,  $I_0 = v_{ab}/R = \mathcal{E}/R$ .

Es decir que en  $t = 0$  el capacitor se comporta como un cable (conductor perfecto).

a) Capacitor descargado al principio

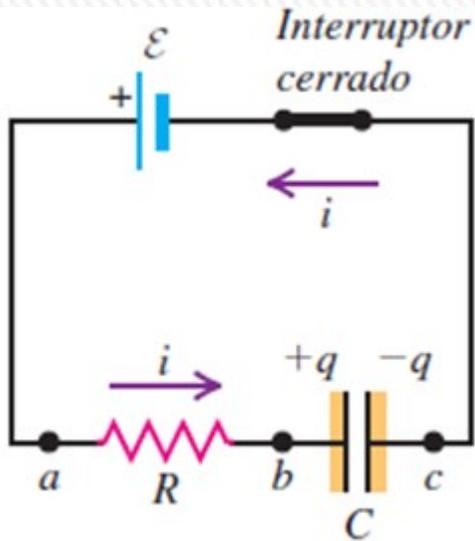


b) Carga del capacitor



Cuando el interruptor se cierra, a medida que transcurre el tiempo, la carga en el capacitor se incrementa y la corriente disminuye.

# CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor



A medida que el capacitor se carga, su voltaje  $v_{bc}$  aumenta, mientras que el voltaje del resistor  $v_{ab}$ , disminuye, cumpliéndose siempre que:  $\mathcal{E} = v_{ab} + v_{bc}$ .  
Sea  $q$  la carga del capacitor e  $i$  la corriente del circuito, en un instante genérico mientras se carga el capacitor.  
Luego de un cierto tiempo, el capacitor se termina de cargar,  $i = 0$ , por lo que  $v_{ab} = i.R = 0$ , y  $v_{bc} = \mathcal{E}$ .  
Las diferencias de potencial instantáneas valen:  
 $v_{ab} = i.R$  y  $v_{bc} = q/C$ .

Con la regla de Kirchhoff de las mallas, se obtiene

$$\mathcal{E} - i.R - \frac{q}{C} = 0$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

En  $t = 0$  (interruptor cerrado), capacitor descargado:  $q = 0$ , por lo que la corriente *inicial* vale  $I_0 = \mathcal{E}/R$ .

A medida que la  $q$  aumenta,  $q/RC$  crece y la carga del capacitor  $q$  tiende a su valor final ( $Q_f$ ), la corriente  $i$  disminuye y finalmente se vuelve cero. Cuando  $i = 0$ :

$$Q_f = \mathcal{E}C \quad \text{no depende de } R$$



# CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

$$\mathcal{E} - iR - \frac{q}{C} = 0$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC}$$

Vamos a resolver esta ecuación diferencial

Como:  $i = \frac{dq}{dt}$  se tiene que:  $\frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} = -\frac{1}{RC}(q - C\mathcal{E}) \quad \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{RC}$

Para integrar ambos miembros cambio las variables de integración a  $q'$  y  $t'$  y uso  $q$  y  $t$  para los límites superiores, los límites inferiores son  $q = 0$  y  $t = 0$ :

$$\int_0^q \frac{dq'}{q' - \mathcal{E}C} = - \int_0^t \frac{1}{RC} dt' = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt' \quad \ln(q' - \mathcal{E}C) \Big|_0^q = -\frac{t'}{RC} \Big|_0^t$$

$$\ln\left(\frac{q - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \frac{q - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C} = e^{-\frac{t}{RC}} \quad q - \mathcal{E}C = -\mathcal{E}C e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$q = \mathcal{E}C - \mathcal{E}C e^{-\frac{t}{RC}} \quad q(t) = \mathcal{E}C \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q_f \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

Circuito R-C,  
con capacitor  
cargándose:

Carga del capacitor

Capacitancia

Carga final del capacitor =  $C\mathcal{E}$

$$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/RC})$$

fem de la  
batería

Tiempo

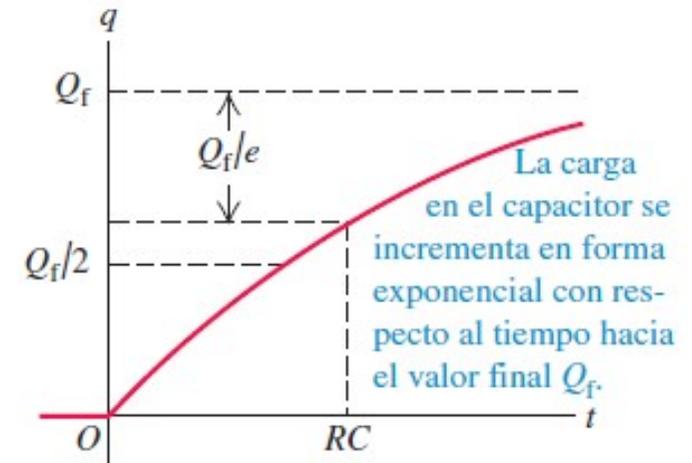
Resistencia

transcurrido desde el cierre del interruptor

# CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

$$q(t) = \mathcal{E}C \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = Q_f \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

La carga del capacitor comienza en cero y poco a poco se acerca al valor final  $Q_f = C\mathcal{E}$ .

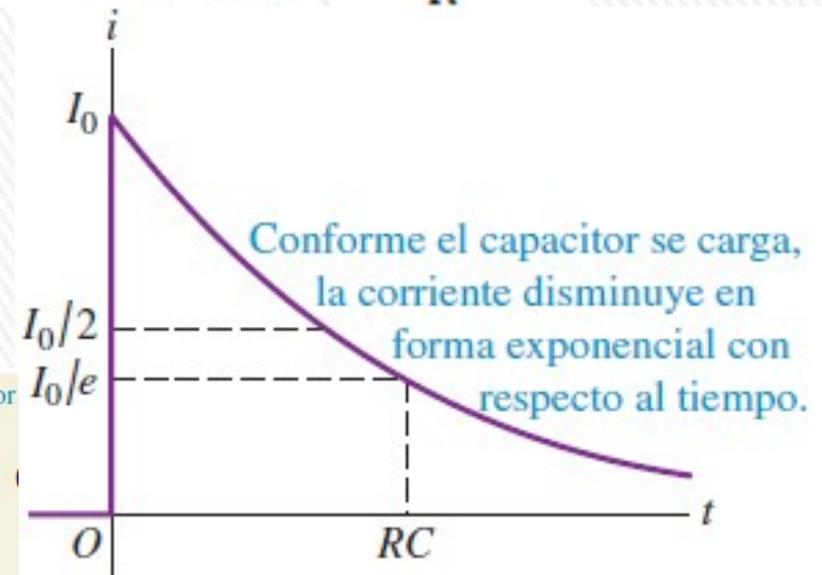


La corriente instantánea  $i$  es la derivada con respecto al tiempo:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \mathcal{E}C \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \right) = \mathcal{E}C \left( -e^{-\frac{t}{RC}} \right) \left( -\frac{1}{RC} \right) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Cuando el interruptor se cierra ( $t = 0$ ), la corriente pasa de cero a su valor inicial  $I_0 = \mathcal{E}/R$ ; después de eso, tiende gradualmente a cero.



Circuito R-C, capacitor que se carga:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} = I_0 e^{-t/RC}$$

Corriente inicial =  $\mathcal{E}/R$

Corriente:  $i$     fem de la batería:  $\mathcal{E}$     Tiempo transcurrido desde el cierre del interruptor:  $t$

Tasa de cambio de la carga del capacitor:  $\frac{dq}{dt}$     Resistencia:  $R$     Capacitancia:  $C$

# CIRCUITOS RC – Carga de un capacitor

**Constante de tiempo** - Después de un tiempo igual a  $RC$  ( $t=RC$ ):

$$i(t = RC) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{RC}{RC}} = I_0 e^{-1} = I_0 \frac{1}{e}$$

$$q(t = RC) = Q_f \left(1 - e^{-\frac{RC}{RC}}\right) = Q_f (1 - e^{-1}) = Q_f \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

la corriente ha disminuido a  $1/e$  (alrededor de 0,368) de su valor inicial, y la carga del capacitor ha alcanzado  $(1 - 1/e) = 0,632$  de su valor final  $Q_f = C\mathcal{E}$ .

Por lo tanto, el producto  $RC$  es una medida de la rapidez con que se carga el capacitor.

El término  $RC$  recibe el nombre de **constante de tiempo o tiempo de relajación** del circuito, y se denota con  $\tau$ :

$$\tau = RC$$

Cuando  $\tau$  es pequeña, el capacitor se carga con rapidez; cuando es grande, el proceso de carga toma más tiempo.

Si la resistencia es pequeña, es fácil que fluya la corriente y el capacitor se carga rápido.

Si  $R$  está en ohms y  $C$  en farads,  $\tau$  está en segundos.

En un intervalo de tiempo  $2\tau$  la corriente desciende a  $i(2\tau) = I_0 e^{-2} = 0,135I_0$ ;

en  $3\tau$ :  $i(3\tau) = I_0 e^{-3} = 0,0498I_0$

en  $10\tau$ :  $i(10\tau) = I_0 e^{-10} = 4,54 \times 10^{-5}I_0$

# CIRCUITOS RC – Descarga de un capacitor

Ahora tengo el capacitor con *una* carga  $Q_0$ , y retiro la batería.

Cuando cierro el interruptor, supongo que  $t = 0$ .  
 $q = Q_0$ .

El capacitor se descarga a través del resistor y su carga disminuye finalmente a cero.

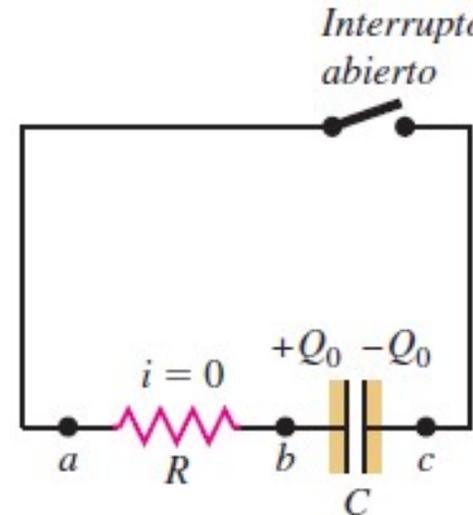
La regla de Kirchhoff de las mallas da la ecuación anterior pero con  $\mathcal{E} = 0$ :

$$0 - iR - \frac{q}{C} = 0 \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$$

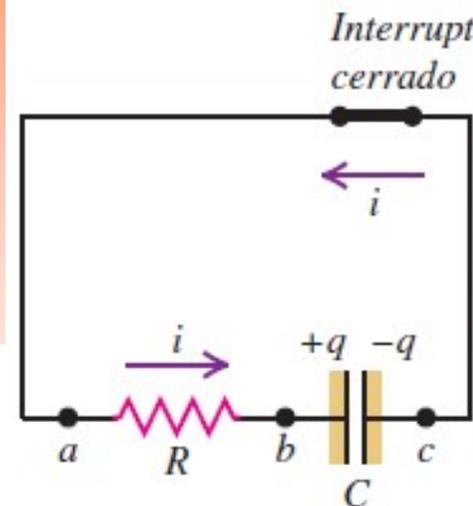
La corriente  $i$  ahora es negativa:  
la carga positiva  $q$  ahora sale de la placa izquierda del capacitor, por lo que la corriente va en sentido opuesto al que se ilustra en la figura.

En  $t = 0$ ,  $q = Q_0$ , corriente inicial es  $I_0 = -Q_0/RC$ .

a) Capacitor inicialmente cargado



b) Descarga del capacitor



Cuando se cierra el interruptor, tanto la carga en el capacitor como la corriente disminuyen con el tiempo.

# CIRCUITOS RC – Descarga de un capacitor

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$$

Para obtener  $q$  como función del tiempo se reordena la ecuación, de nuevo se cambian los nombres de las variables a  $q$  y  $t$ , y se procede a integrar, los límites para  $q'$  son ahora de  $Q_0$  a  $q$ .

$$\int_{Q_0}^q \frac{dq'}{q'} = \frac{1}{RC} \int_0^t dt'$$

$$\ln \frac{q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

$$q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

La corriente instantánea  $i$  es la derivada de esta con respecto al tiempo:

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left( Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \right) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \left( -\frac{1}{RC} \right) = -\frac{\mathcal{E}C}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = -I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

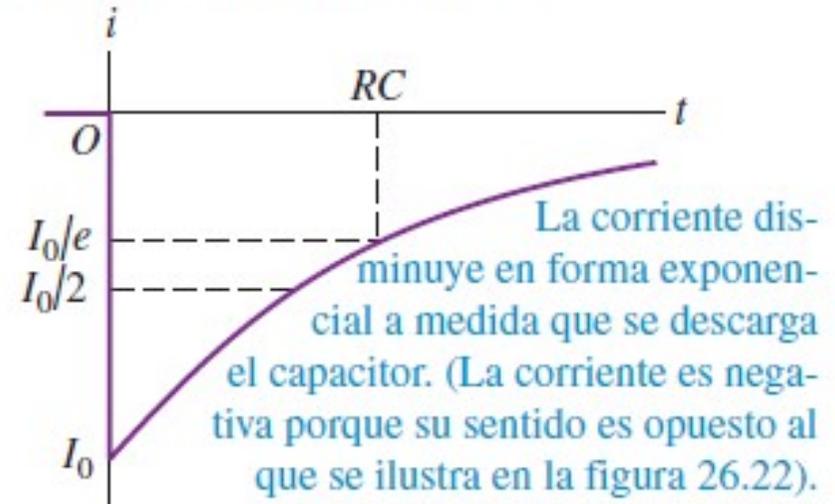


# CIRCUITOS RC – Descarga de un capacitor

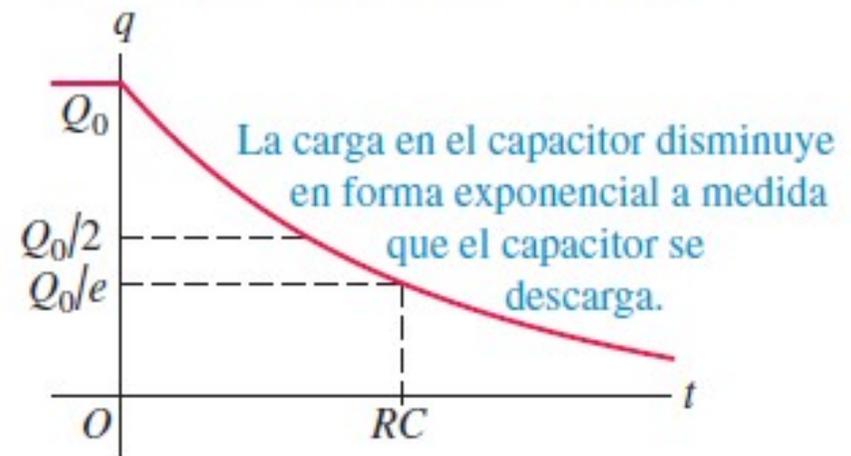
Gráficas de la corriente y la carga; ambas cantidades tienden a cero en forma exponencial con respecto al tiempo.

En un circuito cuando tengo un capacitor totalmente descargado el mismo se comporta como un cable, mientras que cuando está totalmente cargado actúa como un interruptor abierto.

a) Gráfica de la corriente contra el tiempo para un capacitor en descarga



b) Gráfica de la carga del capacitor contra el tiempo para un capacitor en descarga



# CIRCUITO RC BALANCE ENERGÍA

Mientras el capacitor se carga, la tasa instantánea a la que la batería entrega energía al circuito es  $P = \mathcal{E}i$ .

La tasa instantánea a la que la energía eléctrica se disipa en el resistor es  $i^2R$ , y la tasa a la que la energía se almacena en el capacitor es  $iv_{bc} = iq/C$ :

$$\mathcal{E}i = i^2R + \frac{iq}{C}$$

Esto significa que de la potencia suministrada por la batería, una parte se disipa en el resistor y otra parte se almacena en el capacitor.

Energía total suministrada por la batería durante la carga del capacitor: igual a la fem  $\mathcal{E}$  de la batería multiplicada por el total de la carga  $Q_f$ , o  $\mathcal{E} \cdot Q_f$ .  
La energía total almacenada en el capacitor es  $Q_f \mathcal{E}/2$ .

Así, exactamente la mitad de la energía suministrada por la batería se almacena en el capacitor, y la otra mitad se disipa en el resistor.

Esta división a la mitad de la energía no depende de  $C$ ,  $R$  o  $\mathcal{E}$ .

Estos resultados se pueden verificar en detalle tomando la integral con respecto al tiempo de cada una de las cantidades de potencia.

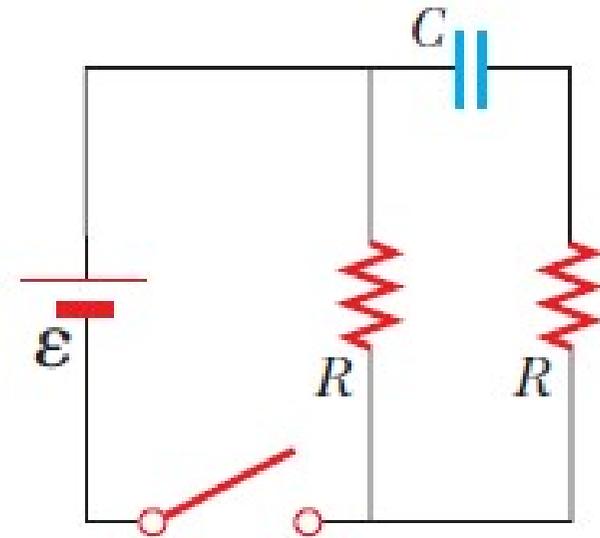
## PREGUNTA RÁPIDA (QUICK QUIZ)

Considere el circuito de la figura y suponga que la batería no tiene resistencia interna.

i) **Justo después de cerrar el interruptor, ¿cuál es la corriente en la batería?**

- a) 0,
- b)  $\mathcal{E}/2R$ ,
- c)  $2\mathcal{E}/R$ ,
- d)  $\mathcal{E}/R$ ,
- e) *imposible de determinar.*

ii) **Después de un tiempo muy largo,** ¿cuál es la corriente en la batería? Elija entre las mismas opciones



i) **c)  $2\mathcal{E}/R$**

Justo después de que se ha cerrado el interruptor, no existe carga en el capacitor. Mientras el capacitor comienza a cargarse, existe corriente en ambas ramas del circuito, por lo que la mitad derecha del circuito es equivalente a dos resistencias  $R$  en paralelo, es decir, una resistencia equivalente de  $\frac{1}{2} R$ .

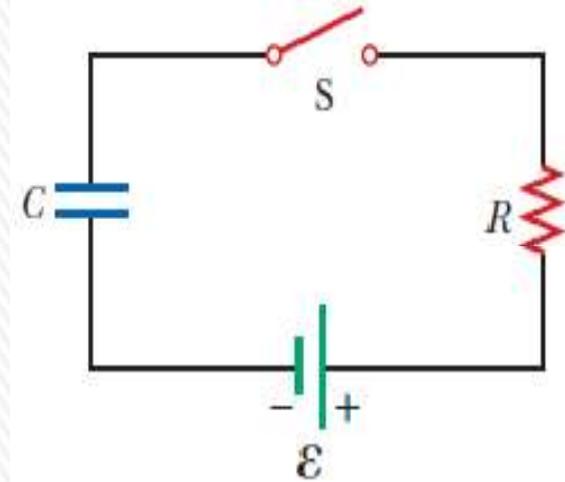
ii), **d)  $\mathcal{E}/R$**  . Después de mucho tiempo, el capacitor se carga por completo y la corriente en la rama derecha disminuye hasta cero. Ahora la corriente existe sólo en una resistencia  $R$  a través de la batería

## EJEMPLO: ejercicio 2.1.14

Considere el circuito RC en serie de la figura en el cual  $R = 1,00 \text{ M}\Omega$ ,  $C = 5,00 \text{ }\mu\text{F}$  y  $\varepsilon = 30,0 \text{ V}$ .

Encuentre:

- la constante de tiempo del circuito;
- la máxima carga en el capacitor después de que se cierra el interruptor;
- la carga en el capacitor y la corriente que circula 10,0 s después de cerrar el interruptor,
- el tiempo que demora en alcanzar el capacitor el 75% de la carga máxima.



a) Constante de tiempo  $\tau = RC = (1,00 \times 10^6 \text{ }\Omega)(5,00 \times 10^{-6} \text{ F}) = 5,00 \text{ s}$

b) Carga máxima  $Q = \varepsilon C = (30,0 \text{ V})(5,00 \times 10^{-6} \text{ F}) = 150 \times 10^{-6} \text{ C} = 150 \text{ }\mu\text{C}$

**$Q = 150 \text{ }\mu\text{C}$**

c) Carga como función del tiempo:

$$q(t) = Q \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = (150 \text{ }\mu\text{C}) \left( 1 - e^{-\frac{10,0}{5,00}} \right) = 129,70 \text{ }\mu\text{C}$$

**$q(t = 10,0 \text{ s}) = 130 \text{ }\mu\text{C}$**

Corriente como función del tiempo:  $I(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{30,0}{1,00 \times 10^6} e^{-\frac{10,0}{5,00}} =$

$= (3,00 \times 10^{-5}) e^{-2} = 4,06 \text{ }\mu\text{A}$

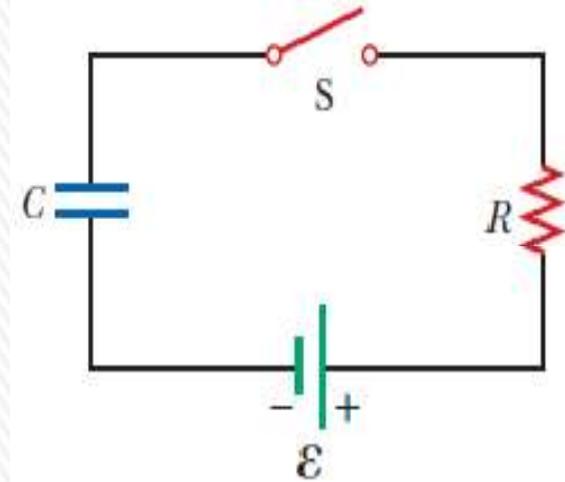
**$I(t = 10 \text{ s}) = 15,0 \text{ }\mu\text{A}$**

## EJEMPLO: ejercicio 2.1.14

Considere el circuito RC en serie de la figura en el cual  $R = 1,00 \text{ M}\Omega$ ,  $C = 5,00 \text{ }\mu\text{F}$  y  $\varepsilon = 30,0 \text{ V}$ .

Encuentre:

- la constante de tiempo del circuito;
- la máxima carga en el capacitor después de que se cierra el interruptor;
- la carga en el capacitor y la corriente que circula 10,0 s después de cerrar el interruptor,
- el tiempo que demora en alcanzar el capacitor el 75% de la carga máxima.



d) Carga como función del tiempo:  $q(t) = Q \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$

$$\frac{3}{4} Q_f = Q_f \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$\frac{3}{4} = \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$\frac{1}{4} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$-\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \ln(4)$$

$$\ln(4) = \frac{t}{RC}$$

$$t = -RC \ln\left(\frac{1}{4}\right) = RC \ln(4) = 5,00 \ln(4) = 6,93 \text{ s}$$

$$t = 6,93 \text{ s}$$

## EJEMPLO: Ejercicio 2.1.15

**Electricidad atmosférica-** Se puede realizar un modelo simple de la actividad eléctrica terrestre de la siguiente forma.

La superficie terrestre se puede considerar como un conductor, y se constata que con buen tiempo, es decir sin nubes de tormenta, existe un campo eléctrico con un valor promedio de 120 V/m, dirigido hacia el centro de la Tierra.

Este campo eléctrico no es uniforme y disminuye con la altura.

Cuando se dan las condiciones de tormenta eléctrica, este campo en la atmósfera, cercano al suelo invierte su sentido y aumenta en varios órdenes de magnitud (de 10,0 a 500 kV/m).

En la atmósfera existen portadores de carga libres (iones), con una densidad no uniforme, aumentando con la altura. A partir de los 40-60 km de altura, la atmósfera tiene una conductividad suficiente como para considerarla conductora y por lo tanto equipotencial. A esta zona que comienza a esa altura y se extiende indefinidamente se le da el nombre de **electrósfera**.

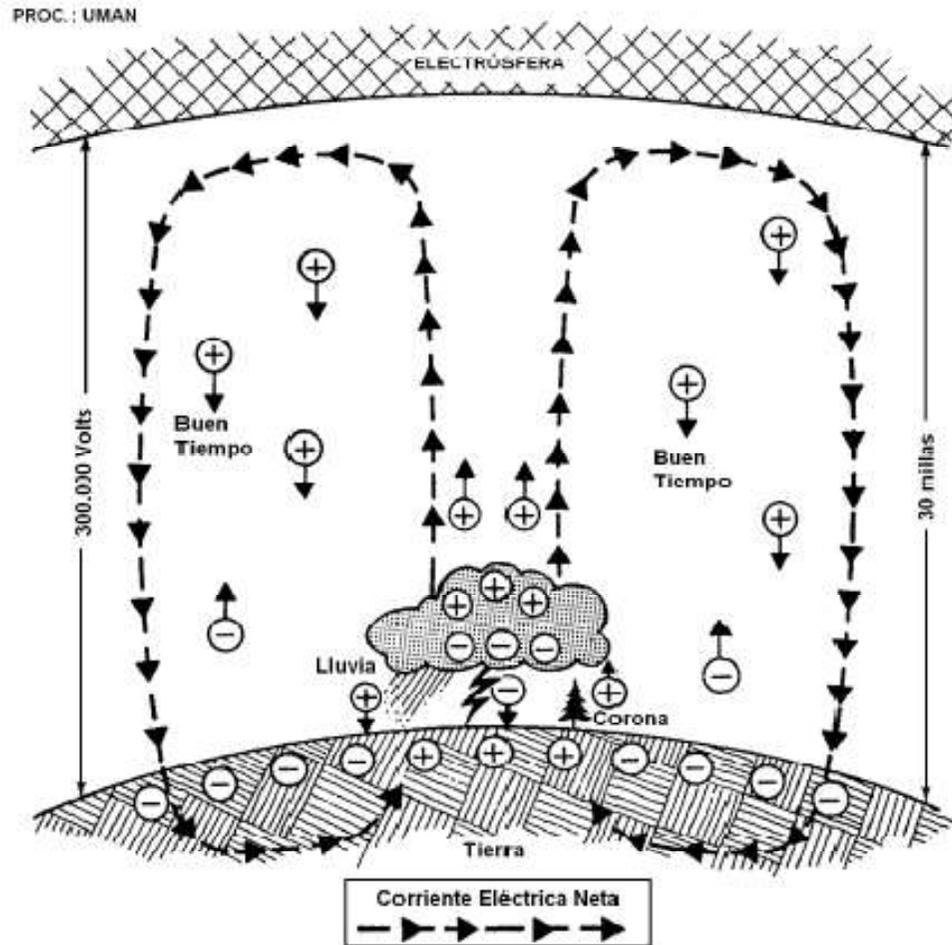
La diferencia de potencial entre la superficie terrestre y la electrósfera es de 200 a 500 KV, con un valor medio de 300 KV).

Como hay partículas cargadas en presencia de un campo eléctrico, las mismas se desplazan, produciendo una densidad de corriente  $J$  (corriente por unidad de área) con buen tiempo, como se muestra en la figura.

Esta densidad de corriente en buen tiempo se ha medido experimentalmente, y se obtiene un valor de  $J = 2,00$  a  $4,00$  pA/m<sup>2</sup>.

También se sabe que cada segundo están "cayendo" entre 40 y 100 rayos a la tierra y cada uno de ellos transfiere una carga negativa promedio de 20 coulombs.

## EJEMPLO: Ejercicio 2.1.15



a) A partir del campo eléctrico sobre la superficie terrestre con buen tiempo, determina la densidad superficial de carga  $\sigma$ , y suponiendo que la misma es uniforme en todo el planeta, estima el valor de la carga sobre la superficie terrestre.

¿Corresponde a un exceso de cargas positivas o negativas?

b) Determina a partir de la densidad media de corriente, la intensidad total que entra sobre la superficie del planeta. A partir del valor hallado estima el tiempo que tardaría la Tierra en descargarse, suponiendo que en todo el planeta hay buen tiempo.

c) Explica por qué efectivamente no se produce dicha descarga, y se sigue manteniendo cargada.

d) Realiza un modelo de capacitor para las condiciones de buen tiempo y determina el valor de su capacitancia. ¿Podrías realizar otro modelo de capacitor para la situación de una nube de tormenta y el suelo?

## EJEMPLO: Ejercicio 2.1.15

a) A partir del campo eléctrico sobre la superficie terrestre con buen tiempo, determina la densidad superficial de carga  $\sigma$ , y suponiendo que la misma es uniforme en todo el planeta, estima el valor de la carga sobre la superficie terrestre. ¿Corresponde a un exceso de cargas positivas o negativas?

Zona entre la superficie terrestre y la electrósfera.

**A partir del campo eléctrico atmosférico medio  $E_0$ , determinaremos la densidad de carga superficial  $\sigma$ .**

Considero a la superficie terrestre como un conductor plano infinito, por lo que su campo eléctrico vale:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \sigma = \epsilon_0 E_0$$

Considerando que la permitividad del aire es aproximadamente igual a la permitividad del vacío:  $\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$  y tomando un valor de  $E_0 = 120 \text{ V/m}$

**Se obtiene un valor de  $\sigma = 1,06 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$**

Corresponde a una carga negativa ya que el campo es entrante a la superficie terrestre.

Considerando un radio medio de la Tierra igual a  $R = 6.371 \text{ km}$  y suponiendo a la misma como una esfera uniformemente cargada con la densidad de carga  $\sigma$  anteriormente calculada, se tiene que la carga neta de la Tierra vale:

$$Q_T = (4\pi R^2)\sigma = 5,42 \times 10^5 \text{ C} \quad (\text{carga negativa})$$

$$Q_T = -5,4 \times 10^5 \text{ C} \quad (540.000 \text{ Coulombs de carga negativa})$$

## EJEMPLO: Ejercicio 2.1.15

b) Determina a partir de la densidad media de corriente, la intensidad total que entra sobre la superficie del planeta. A partir del valor hallado estima el tiempo que tardaría la Tierra en descargarse, suponiendo que en todo el planeta hay buen tiempo.

b) Tomo como densidad de corriente el valor medio:  $J = 3,00 \times 10^{-12} \text{ A/m}^2$

La corriente total vale:

$$I = J \cdot A = J \cdot 4\pi R^2 = (3,00 \times 10^{-12}) 4\pi (6,371 \times 10^6)^2 = 1,53 \times 10^3 \text{ A}$$

La carga total Q se descargaría en un tiempo t:

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{5,42 \times 10^5}{1,53 \times 10^3} = 354 \text{ s.}$$

**I = 1.530 A   t = 354 s   La Tierra se descargaría en menos de 6 minutos!**



## EJEMPLO: Ejercicio 2.1.15

c) Explica por qué efectivamente no se produce dicha descarga, y se sigue manteniendo cargada.

c) Se producen entre 40 y 100 rayos en cada segundo, que transportan una carga de -20 C.

$$I_{\text{rayos mínimo}} = \dot{n}Q = 40 \frac{1}{\text{s}} (20 \text{ C}) = 800 \text{ A}$$

$$I_{\text{rayos máxima}} = \dot{n}Q = 100 \frac{1}{\text{s}} (20 \text{ C}) = 2000 \text{ A}$$

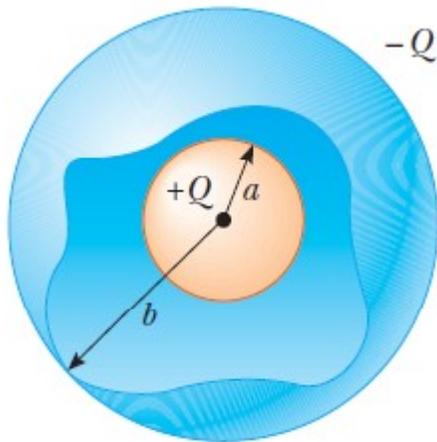
Los rayos están transfiriendo una corriente equivalente de 800 a 2000 A hacia la Tierra que compensa la corriente de buen tiempo que "escapa" de la misma.



## EJEMPLO: Ejercicio 2.1.15

d) Realiza un modelo de capacitor para las condiciones de buen tiempo y determina el valor de su capacitancia. ¿Podrías realizar otro modelo de capacitor para la situación de una nube de tormenta y el suelo?

d) Para buen tiempo realizo un modelo de capacitor esférico. Habíamos visto que:



$$C = \frac{ab}{k_E (b - a)}$$

$$C = \frac{ab}{k_E (b - a)} = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{(b - a)} = \frac{4\pi\epsilon_0 R(R + d)}{d}$$

$$\frac{4\pi(8,85 \times 10^{-12})(6371 \times 10^3)(6421 \times 10^3)}{50 \times 10^3} = 9,10 \times 10^{-2} \text{ F}$$

Si modelo a la Tierra como un capacitor plano:

$$(8,85 \times 10^{-12}) \frac{4\pi(6,371 \times 10^6)^2}{50 \times 10^3} = 90,3 \times 10^{-3} \text{ F}$$

$$C_{plano} = \epsilon \frac{A}{d} = \epsilon \frac{4\pi R^2}{d} =$$

Con ambos modelos obtengo que la capacitancia vale aprox.:  **$C = 9,0 \times 10^{-2} \text{ F}$**

Sin embargo, esto es sólo una estimación, considerando que el medio entre las placas es aislante, lo cual sabemos que no lo es, ya que hay una corriente continua entre las placas...

## EJEMPLO: Ejercicio 2.1.15

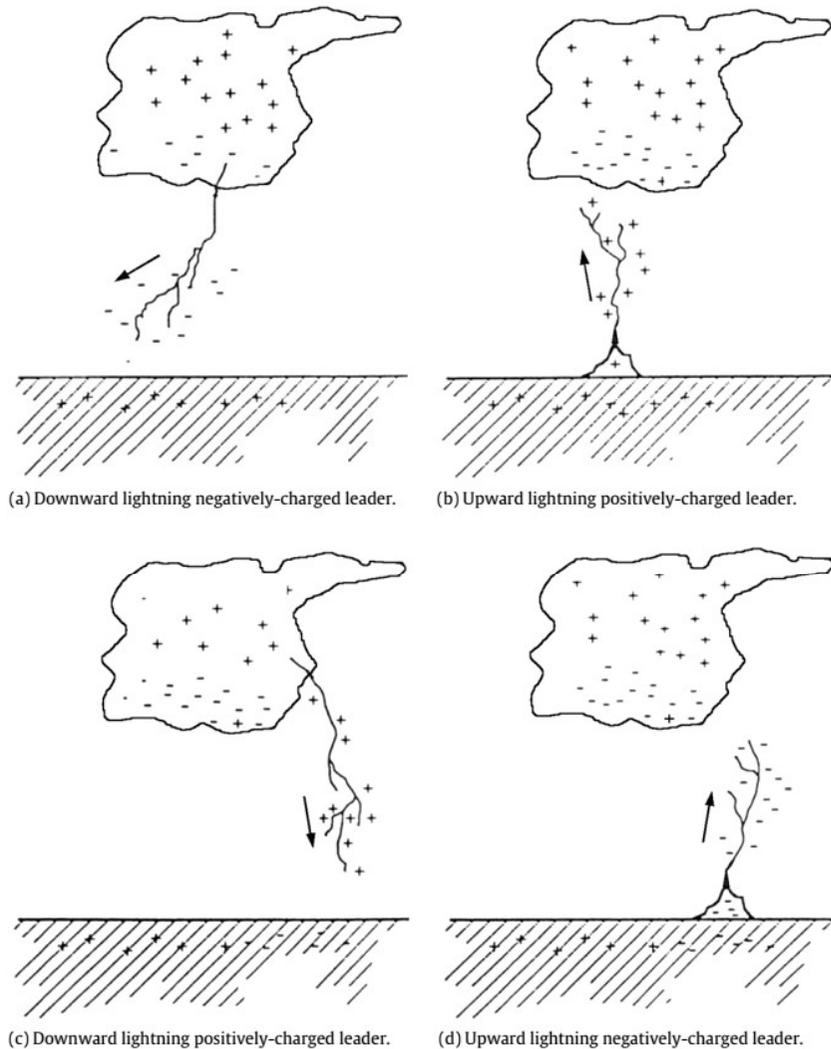
La ventaja del modelo plano, es que me permite usarlo para la situación de mal tiempo, ya que la tormenta es local.

Podemos usar los datos correspondiente a la tormenta: valor del campo eléctrico, distancia de la nube a la superficie, área de la nube...



# TIPOS DE RAYOS

J.R. Dwyer, M.A. Uman / Physics Reports 534 (2014) 147–241



<sup>1</sup>  
Dentro de las descargas entre nube y tierra existen cuatro tipos de rayos dependiendo de la dirección de propagación y de la polaridad de la carga efectivamente transferida de la nube a tierra.

- 1 Descendente negativo (-CG)
- 2 Ascendente positivo (+GC)
- 3 Descendente positivo (+CG)
- 4 Ascendente negativo (- GC)

Fig. 1.2. The four types of cloud-to-ground lightning flashes as defined from the direction of leader propagation and the charge on the initiating leader. Source: Adapted from Berger [490].



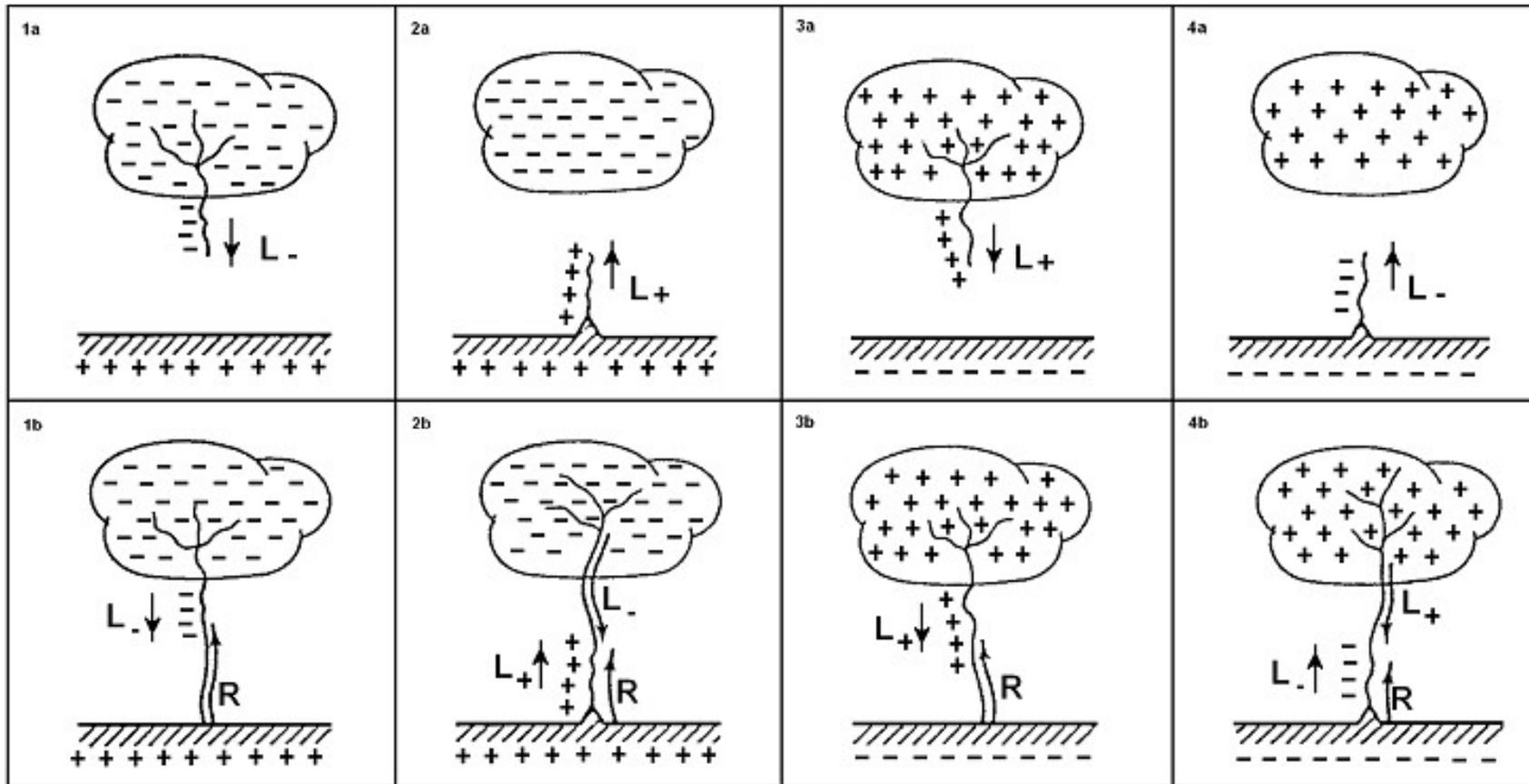
# TIPOS DE RAYOS

**-CG (90%)**

**+GC**

**+CG (10%)**

**-GC**



**a) Guías, b) Descargas de retorno**



# VALORES REPRESENTATIVOS DE LAS MAGNITUDES FÍSICAS DE LAS DESCARGAS

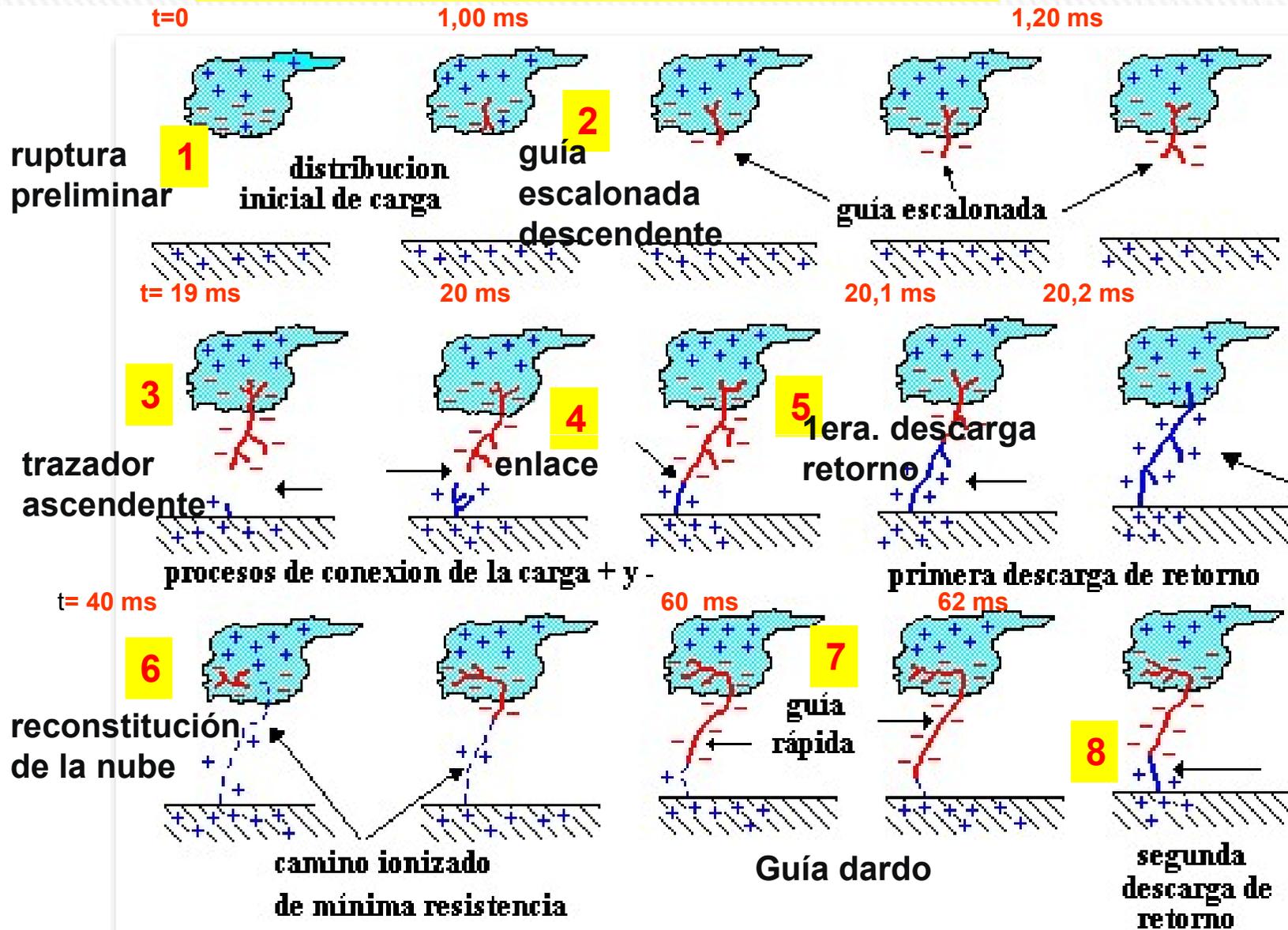
## DESCARGA COMPLETA

Magnitud	Mínimo	Representativo	Máximo
Velocidad de propagación ( $m/s$ )	$2,0 \times 10^7$	$8,0 \times 10^7$	$1,6 \times 10^8$
Velocidad de subida ( $kA/\mu s$ )	—	40	>100
Tiempo de subida ( $\mu s$ )	>0,2	1	>4,5

Magnitud	Mínimo	Representativo	Máximo
Número de descargas	1	3-4	26
Intervalo de tiempo entre descargas individuales en ausencia de corriente continua ( $ms$ )	3	40	100
Duración de una descarga completa ( $s$ )	$10^{-2}$	0,2	2
Carga transferida incluyendo la corriente continua (Coul)	3	25	90

# FORMACIÓN DE LA DESCARGA ENTRE NUBE Y TIERRA

## Rayo nube-tierra negativo (-CG)



# FORMACIÓN DE LA DESCARGA ENTRE NUBE Y TIERRA

## Rayo nube-tierra negativo (-CG)

**1) Ruptura preliminar-** 90 % de las descargas nube-tierra se inician en el interior de la nube y llevan carga negativa a tierra. Se inicia en un fenómeno llamado “Ruptura Preliminar”, descarga electrostática en el interior de la nube, en zona de carga negativa (altura de unos 5 a 8 km). Es seguida por un proceso de descarga dentro de la nube que dura algunos milisegundos a partir del cual se comienza a formar la llamada “Guía Escalonada” de la nube a tierra.

**2) Guía escalonada descendente-** Si  $E$  asociado a la ruptura preliminar es suficientemente grande se produce un fenómeno de propagación de un canal de aire ionizado cargado negativamente llamado **guía escalonada o trazador descendente**. Es un “tubo” de plasma altamente ionizado de algunos centímetros de diámetro, rodeado de una envoltura tipo “descarga en corona” con un diámetro del orden de un metro, de cierta luminosidad y que avanza de a saltos. Saltos o escalones desde un punto se produce una descarga duración:  $1 \mu s$ ;  $I = 100$  a  $1000$  A,  $V = 10^6$  a  $10^7$  m/s, propagación: 50 a 100 m; tiempo de espera:  $50 \mu s$ . Luego otro salto cuya dirección no está relacionada con el salto anterior, pudiendo incluso ramificarse y cada rama desarrollarse independientemente de las otras, también a saltos.

**3) Trazador ascendente-** Al acercarse la guía escalonada a tierra, cuando el campo promedio entre la punta de la guía y los puntos salientes de tierra (que son múltiples en cualquier entorno normal) llega a unos **500 kV/m** las corrientes corona de dichos puntos aumentan y se transforman en canales ionizados que se propagan hacia arriba de manera análoga a la propagación de la guía escalonada, impulsados por el propio campo eléctrico. La velocidad de trazadores:  $10^4$  a  $3 \times 10^5$  m/s. Generalmente se forman varios de ellos en diferentes puntos donde se alcanza el campo eléctrico crítico ( $E$  crítico). Alcanzan alturas de 10 a 50 m.

**4) Proceso de enlace-** Las puntas de la guía escalonada descendente y los trazadores ascendentes se acercan. Cuando el campo entre la punta de uno de esos trazadores ascendentes y la punta de la guía descendente llega a un valor suficientemente alto (aprox.  $3 \times 10^6$  ruptura dieléctrica del aire), se completa el canal conductor entre tierra y nube y se produce la primera descarga de retorno entre la nube y el objeto que emitió el trazador ascendente. El objeto se convierte entonces en el punto de impacto. El trazador ascendente exitoso, que es de los múltiples trazadores generados por una guía el que logra establecer la conexión, proviene generalmente de uno de los primeros objetos cuya distancia a la punta de la guía descendente llega a un valor tal que el campo medio a través de esa distancia adquiere el valor crítico.

# FORMACIÓN DE LA DESCARGA ENTRE NUBE Y TIERRA

## Rayo nube-tierra negativo (-CG)

**5) Primera descarga de retorno-** Su sentido de propagación es ascendente, vale decir contrario al sentido del trazador escalonado que, es descendente. Muy luminosa, de aspecto ramificado y muy intensa, con corrientes del orden de decenas de miles de amperios. El frente de onda se propaga a una velocidad del orden de 1/10 de la velocidad de la luz. La longitud típica del canal es de 5 km (2 a 14 km). La duración del recorrido desde tierra hasta la nube es del orden de 70 microsegundos. Es acompañada eventualmente de intensas ondas sonoras denominadas trueno, provocadas por la expansión supersónica del aire que rodea al canal de la descarga eléctrica. Presión en el canal: 10 atm, temperatura: 30.000 K.

**6) Proceso de reconstitución de la carga de la nube-** Después de la primera descarga se tiene dentro de la nube una zona sin carga pero con una conductividad mayor que el aire circundante (aprox.  $\sigma = 0,01 \text{ S/m}$ ) y se produce la sexta etapa de la descarga que consiste en **procesos de reconstitución de la carga**. Tiene una duración media aproximada de 50 ms. Surgen diferentes procesos que reconstituyen el campo eléctrico en la nube.

**7) Guía dardo (dart leader)-** Cuando la carga se reconstituido a un nivel suficientemente alto, se produce otra transferencia de carga en forma continua por el canal original, que queda ligeramente ionizado y ya formado. Tiene características diferentes a la de la guía escalonada. Se observa una zona del canal, débilmente luminosa, de algunos metros de largo. Velocidad:  $10^7 \text{ m/s}$ . Desplazándose por el camino establecido por la primera descarga. Recorre solamente el canal principal, ignorando las ramificaciones. Cuando esta guía llega a tierra queda establecido un canal conductor ionizado entre nube y tierra y su carga se transfiere a tierra formando una segunda descarga de retorno.

**8) Segunda descarga de retorno y descargas subsiguientes-** La transferencia de carga de la 2da. descarga de retorno se produce sobre el mismo punto del impacto principal. El 2do. retorno, tiene una corriente de menor valor de pico, pero  $dl/dt$  es mayor. En la mayor parte de los rayos ocurren más de dos descargas de retorno. La 2da. y las subsiguientes tienen características similares. Se han registrado rayos con decenas de descargas que siguen al primer retorno, todas recorriendo solamente el canal principal. Si uno observa un rayo a simple vista constata frecuentemente que el rayo principal es de gran luminosidad y pulsante mientras que las ramificaciones son fijas y más débiles. Tanto la descarga principal como las subsiguientes tienen una duración del orden de decenas de micro segundos a algunos mili segundos.