Propuestas de proyectos de pasaje de curso:[*]
Procesos estocásticos y simulación 2023

20 de septiembre de 2023

Proyecto 1. Parada óptima: Opciones integrales. Se define el proceso Browniano geométrico

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}, \quad t \geq 0,$$

Se trata de resolver el problema de para óptima

$$\sup_\tau \mathbf{E}\left(e^{-r\tau}\int_0^\tau S_s ds\right).$$

Como el proceso integral no es markoviano, se multiplica y divide por S_t cambiando la medida de probabilidad con el teorema de Girsanov, resolviendo el problema equivalente

$$\sup_\tau \widehat{\mathbf{E}}\left(e^{-\widehat{r}\tau}\frac{\int_0^\tau S_s ds}{S_\tau}\right).$$

donde

$$\frac{d\widehat{\mathbf{P}}_t}{d\mathbf{P}_t} = \frac{S_t}{e^{(\sigma^2/2-\mu)t}}$$

y se aplica el teorema de Girsanov. Estudiar el artículo *Integral Options* de D. Kramkov y E. Mordecki, *Theory of Probability and Its Applications*, (1994) **39(1)**, 201–210.

Proyecto 2. Parada óptima: Opciones rusas. Se define el proceso Browniano geométrico

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}, \quad t \geq 0,$$

Se trata de resolver el problema de para óptima

$$\sup_\tau \mathbf{E}\left(e^{-r\tau}\left[\max_{0\leq t\leq \tau} S_t \wedge S_0\psi_0\right]\right).$$

[*] **Versión 2**. Preparadas por E. Mordecki

donde $\psi_0 \geq 1$. Como el proceso del máximo no es markoviano, se multiplica y divide por S_t cambiando la medida de probabilidad con el teorema de Girsanov, resolviendo el problema equivalente

$$\sup_{\tau} \widehat{\mathbf{E}} \left(e^{-\widehat{r}\tau} \left[\frac{\max_{0\leq t\leq \tau} S_t \wedge S_0\psi_0}{S_\tau} \right] \right).$$

donde

$$\frac{d\widehat{\mathbf{P}}_t}{\mathbf{P}_t} = \frac{S_t}{e^{\frac{\sigma^2}{2}-\mu t}}$$

y se aplica el teorema de Girsanov. Estudiar el artículo *A new look at the Russian Options* de L. Shepp y A. N. Shiryaev, *Theory of Probability and Its Applications*, (1994) **39(1)**, 103–119.

Proyecto 3. **Procesos de difusión en Biología.** El proyecto tiene como objetivo simular algunos procesos estocásticos que modelan fenómenos biológicos y calcular algunas cantidades de interés a partir de la simulación. El ejercicio está basado en el Ejemplo 9.13 del libro [1] "Introduction to Stochastic processes with R"de Robert Dobrow (2016, Wiley), y en el Capítulo 7 del libro [2] "Probability Models for DNA Sequence Evolution" de Rick Durrett (Second edition, 2008, Springer).

Parte I. Deriva genética aleatoria. Simular la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = \sqrt{X(t)(1 - X(t))}dW(t), \quad X(0) = x \in (0, 1).$$

Reproducir los gráficos de las densidades de la solución para diferentes tiempos y la distribución asintótica tal cual se muestran en el ejemplo 9.13 de [1].

Parte II. Generalizaciones y variaciones. Simular los siguientes procesos estocásticos, explicados en [2]:

(A) El modelo de Wright-Fisher con selección (Ejemplo 7.4 pág. 252).

(B) El modelo de Wright-Fisher con selección y mutación (Ejemplo 7.5 pág. 253).

(C) El modelo de Moran (Ejemplo 7.6 pág. 254).

Utilizar el esquema de Euler y el esquema de Milstein.

Explorar la posibilidad de obtener la distribución asintóntica estimada a partir de simulaciones y la densidad para distintos valores de t, siguiendo el esquema de la primera parte, para estos modelos. Presentar algunos de los resultados obtenidos.

Proyecto 4. **Machine Learning: Difusiones reversas.** Estudiar el artículo "REVERSE-TIME DIFFUSION EQUATION MODELS" de BrianD.O. ANDERSON, Stochastic Processes and their Applications 12 (1982) 313–326. En dicho artículo se resuelve el siguiente problema: Dada una difusión en $[0, T]$ definda por la ecuación

$$dx_t = f(x_t, t)dt + g(x_t, t)dw_t, \tag{1}$$

donde $\{w_t\}$ es un proceso de Wiener, encontrar los coeficientes de una ecuación reversa en el tiempo (es decir, que parte de $t = T$ y llega a $t = 0$ que tenga las mismas probabilidades que (1). Dichas ecuaciones son utilizadas en el proceso de "denosing"de los algoritmos de imágenes basados en difusiones (ver SCORE-BASED GENERATIVE MODELING THROUGH STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS, por Yang Song y coautores, `arXiv:2011.13456v2`.

Proyecto 5. Machine Learning: Diffusion models. Los modelos de difusión describen el estado del arte en tratamiento de imágenes (simulación, clasificación, etc.) Estudiar el artículo SCORE-BASED GENERATIVE MODELING THROUGH STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS, por Yang Song y coautores, `arXiv:2011.13456v2`, donde se explica el método utilizado. Dicho método consta de dos partes: (a) agregar ruido a una imagen mediante un proceso de difusión, hasta que resulte ruido blanco; (b) aprender a quitar el ruido introducido mediante una red neuronal, que en cada paso parte de la imagen con ruido e intenta aprender la imagen sin ruido.

El énfasis del proyecto es en la parte (a).

Proyecto 6. El problema de Dirichlet. Estudiar como resolver la ecuación de Laplace (o de Poisson) con el Browniano. El problema es encontrar $u(x)$ con $x \in \mathbf{R}^n$ que verifique

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \text{en } U, \\ u(x) = \varphi(x), & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Aquí $U \subset \mathbf{R}^n$ es acotado y verifica una condición de regularidad en su frontera ∂U. Dicho problema se resuleve con un movimiento Browniano. La idea sería seguir algo de lo que está en el capítulo 3 del libro *Brownian Motion* de P. Mörters y Y. Peres (Cambridge University Press 2010. La presentación del libro se hace con cierta generalidad en el borde, eso se puede simplificar. Es un trabajo co-dirigido con Nicolás Frevenza.

Proyecto 7. Estimando una dirección aleatoria en grandes dimensiones (Spike model). Se tiene el modelo

$$X = \frac{\beta}{n}\theta\theta^T + W.$$

El objetivo es estimar $\theta \in \mathbf{R}^n$. Aquí W, el ruido, es una matriz $n \times n$ simétrica con entradas $W_{ii} \sim \mathcal{N}(0, 2/n)$, $(1 \leq i \leq n)$ y $W_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1/n)$, $(1 \leq i < j \leq n)$, todas las entradas independientes. Se asume un enfoque bayesiano, y se propone un algoritmo que utiliza difusiones para simular el vector θ con la distribución a posteriori. Es el contenido del artículo "Posterior Sampling from the Spiked Models via Diffusion Processes" de A. Montanari y Y. Wu. `arXiv:2304.11449v1`. Este es un trabajo co-dirigido con Manuel Sáenz.

Proyecto 8. La fórmula de Black-Scholes (1). Una opción (europea de compra) es un contrato firmado en $t = 0$ que da el derecho a comprar un activo de precio contingente S_t en el instante $t = T$ a un precio acordado K. En su celebrado artículo, Black y Scholes[1] establecen que el precio de dicho contrato es

$$S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2)$$

donde

$$d_{1,2} = \frac{\log(S_0/K) + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

donde se asume que el activo contingente tiene una evolución modelada por un movimiento Browniano geométrico

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}, \quad t \geq 0,$$

y r es la tasa de interés del mercado. Más allá del interés histórico del artículo "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" F. Black y M. Scholes, Journal of Political Economy, 81(3) pp. 637–654 (1973), se propone estudiar el tema del capítulo 4 del libro "Elementary Stochastic Calculus: with finance in view" de T. Mikosch, World Scientific (1998).

Adicionalmente: Calcular mediante simulación los precios de las siguientes opciones:

(a) $g(x) = \text{máx}(x - 100, 0)$.

(b) $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 50 < x < 100 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

(c) $g(x) = \sqrt{\text{máx}(x - 100, 0)}$.

Utilizar $r = 0{,}04$, $\sigma = 0{,}4$, $T = 1/4$ y $S_0 = K = 100$. En el caso (a) construir un intervalo de confianza al 95 % y comparar con el valor dado por la fórmula de Black-Scholes.

Proyecto 9. La fórmula de Black-Scholes (2). Una opción (europea de compra) es un contrato firmado en $t = 0$ que da el derecho a comprar un activo de precio contingente S_t en el instante $t = T$ a un precio acordado K. En su celebrado artículo, Black y Scholes[2] establecen que el precio de dicho contrato es

$$S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2)$$

[1] Por este trabajo Scholes y Merton recibieron el premio Nobel de Economía en 1997

[2] Por este trabajo Scholes y Merton recibieron el premio Nobel de Economía en 1997

donde

$$d_{1,2} = \frac{\log(S_0/K) + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

donde se asume que el activo contingente tiene una evolución modelada por un movimiento Browniano geométrico

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}, \quad t \geq 0,$$

y r es la tasa de interés del mercado. Más allá del interés histórico del artículo "The Pricing of Options and Corporate Liabilities" F. Black y M. Scholes, Journal of Political Economy, 81(3) pp. 637–654 (1973), se propone estudiar el tema del capítulo 4 del libro "Elementary Stochastic Calculus: with finance in view" de T. Mikosch, World Scientific (1998).

Adicionalmente: Calcular la volatilidad implícita en precios de opciones. Para eso

(1) Obtener precios de opciones de compra y venta de algún activo de interés (por ejemplo el SP500 o el IBOVESPA), para un mismo día y distintos precios de ejercicio K.

(2) Con los valores correspondientes, y asumiendo como tasa r el interés que paga un bono cupón cero de la misma duración que las opciones (en el caso americano son los bonos del tesoro) determinar el valor de σ que aplicado a la fórmula de Black y Scholes dan el precio publicado. Ese valor se denomina volatilidad implícita.

(3) Presentar un gráfico de las volatilidades implícitas calculadas en función de los ejercicioes K.