Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2023

Práctico 4: Producto interno real.

1. Supongamos que una imagen se guarda como una matrix A de $m \times n$ de números reales (que indican digamos intensidad de gris). Suponemos que cada número real que se necesita guardar ocupa una unidad de memoria de modo que la imagen inicial ocupa en principio $m \times n$ unidades de memoria.

    a) Supongamos que la imagen admite una descomposición $A = UDV$ donde U es $n \times n$, V es $m \times m$ y D es $m \times n$ pero sólamente tiene entradas no nulas en la diagonal principal (i.e. $d_{1,1}, d_{2,2}, \dots, d_{\text{mín}(m,n),\text{mín}(m,n)}$ son las únicas entradas no nulas y el resto son cero). ¿Cuánta memoria ocupa guardar las matrices U, D, V por separado en lugar de A, si se guardan sólo la diagonal principal de D? ¿Es más o menos que guardar la matriz A directamente?

    b) Supongamos que $m < n$ y observamos que para reconstruir el producto UDV no es necesario saber las filas de V a partir de la $m+1$-ésima. Si no guardamos esos números ¿Cuánto espacio necesitamos para guardar U, D y la parte relevante V' de V?

    c) Supongamos que en lugar de reconstruir A exáctamente se usa una aproximación. La aproximación consiste en suponiendo que $d_{1,1} \geq d_{2,2} \geq \cdots$ cambiar D por la matriz D' con los mismos elementos diagonales excepto que $d'_{i,i} = 0$ si $i > k$ para cierto $k < \text{mín}(m,n)$. ¿Cuánto espacio ocupan las partes relevantes de U, D', V necesarias para calcular el producto $A' = UD'V$.

    d) Experimentando con algunas fotos obtuve que para $m = 480, n = 640$ y $k = 128$ las imagenes A y A' son prácticamente indistinguibles. ¿Qué ocupa más para estos valores, la matriz A, o las partes relevates de U, D' y V?

2. *a*) Se calculo el polinomio de Taylor en $(0,0)$ de una función de dos variables obteniendo $p(x,y) = 27 + 2x^2 - 4xy + 4y^2$. ¿Este polinomio tiene un mínimo en $0,0$?

    b) Sylvester probó en la década de 1850 que componiendo con una rotación adecuada se puede llevar cualquier forma cuadrática $p(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ a la forma $\alpha x^2 + \beta y^2$. Esto es útil por ejemplo para decidir si hay un mínimo absoluto en $(0,0)$ (en ese caso se dice que la forma es *definida positiva*). ¿Podés dar una prueba? Observar que $p(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para cierta matriz simétrica A.

3. Se define la distancia en $\mathbb{R}^d$ como $\text{dist}((x,y),(x',y'))^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2$, la norma como $\|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2$ y el producto interno como $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' + yy'$. Una isometría es una función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva la distancia entre todo par de puntos. Una traslación es una función de la forma $F_b(v) = v + b$ para cierto $b \in \mathbb{R}^2$. Una tranformación ortogonal es una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva el producto interno entre todo par de vectores.

    El objetivo de este ejercicio es mostrar que toda isometría es composición de una transformación ortogonal con una traslación.

    a) Mostrar que si T es ortogonal entonces es una isometría.

    b) Mostrar que para todo vector v con $\|v\| = 1$ existe una transformación ortogonal con $Tv = (1,0)$.

    c) Mostrar que si F es una isometría entonces existe una traslación F_b y una transformación ortogonal T tales que $F' = T \circ F_b \circ F$ es una isometría que fija $(0,0)$ y $(1,0)$.

    d) Mostrar que si F' es una isometría que fija $(0,0)$ y $(1,0)$ existe una transformación ortogonal T' tal que $F'' = T' \circ F'$ fija $(0,0), (1,0)$ y $(0,1)$.

e) Mostrar la identidad de polarización. Es decir, dar una expresión para $\langle v, w\rangle$ en términos de $\|v+w\|^2$ y $\|v-w\|^2$.

f) Usando la identidad de polarización mostrar que F'' de la parte anterior debe ser lineal.

4. Recordemos que un producto interno en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial V es una operación $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ que es bilineal (i.e. lineal si fijamos una coordenada), simétrica, y cumple $\langle v, v\rangle \geq 0$ con igualdad solo si $v = 0$. Dado un producto interno se define la norma asociada como $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$. En general una norma es una función $|\cdot|$ de V a $\mathbb{R}$ que cumple $|v| \geq 0$ con igualdad solo si $v = 0$, $|\lambda v| = |\lambda||v|$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $|\lambda|$ es su valor absoluto, y la desigualdad triangular $|v+w| \leq |v| + |w|$. Para $p \geq 1$ definimos $|(x, y)|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$, resultan ser normas aunque la desigualdad triangular (llamada desigualdad de Minkowski) no es immediata.

   a) Mostrar la desigualdad triangular para $|\cdot|_p$ en el caso $p = 1$.

   b) Demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\|w\|$ y deducir la desigualdad triangular para $|\cdot|_2$.

   c) Mostrar que $|(x, y)|_\infty = \lim_{p\to+\infty} |(x, y)|_p = \max(|x|, |y|)$ es una norma.

   d) Si una norma proviene de un producto interno mostrar que se cumple $2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 = \|v-w\|^2 + \|v+w\|^2$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^2$.

   e) Mostrar que $|\cdot|_p$ no proviene de un producto interno para ningún $p \geq 1$ excepto $p = 2$.

   f) Bosquejar las bolas de radio 1 para $|\cdot|_p$ con $p = 1, 2, 3, \infty$.

   g) Mostrar que para todo $p \geq 1$ existe una constante $C_p > 1$ tal que $C_p^{-1}|v|_2 \leq |v|_p \leq C_p|v|_2$.

5. El proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt consiste en tomar una base $v_1, \ldots, v_n$ de un espacio vectorial con producto interno $\mathbb{R}$ y en orden para $i = 1, \ldots, n$ restarle (si $i > 0$ a v_i múltiplos de $v_1, \ldots, v_{i-1}$ hasta lograr que sea ortogonal a todos, y luego dividir el resultante vector entre su norma para lograr que tenga norma 1.

   a) Mostrar que si A es una matriz cuadrada con columnas $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ por el proceso de ortonormalización se consiguen matrices Q, R tales que Q es ortogonal (i.e. sus columnas son una base ortonormal) y R es triangular superior, y $A = QR$.

   b) Calcular esta descomposición QR para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

   c) El algoritmo QR es una manera relativamente misteriosa de intentar diagonalizar una matriz simétrica A encontrando $D = K^{-1}AK$ diagonal donde K es ortogonal. Para esto se empieza con una descomposición $A = Q_1R_1$ como en las partes anteriores. Luego se observa que $A_2 = Q_1^{-1}AQ_1 = R_1Q_1$ y se repite el procedimiento con A_2 definiendo A_3, etc. y rezando para que las A_n se vayan acercando a una forma diagonal. Iterar el procedimiento QR un par de veces a partir de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Calcular explícitamente la matriz de rango 1 que mejor aproxima en norma de Frobenius a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Dado un subespacio S de un espacio vectorial real con producto interno V la proyección ortogonal sobre S es la única transformación lineal $P : V \to V$ con núcleo $S^\perp$ (el complemento ortogonal de S y tal que $Pv = v$ para todo $v \in S$.

a) Si $v_1, \ldots, v_k$ es una base ortonormal de S mostrar que $Pv = \sum_{i=1}^{k} \langle v_i, v \rangle v_i$ para todo v.

b) Calcular explícitamente la proyección ortogonal de un vector genérico $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sobre el subespacio generado por $(1, 1, 1)$ y $(1, 2, 3)$ en $\mathbb{R}^3$.

c) Si A es una matriz $m \times n$ real con $m > n$ y rango n mostrar que el núcleo de la multiplización a izquierda por la matriz A^t (transpuesta de A) es el complemento perpendicular del subespacio generado por las columnas de A.

d) En el mismo contexto que la parte anterior, mostrar que la imagen de la multiplicación por A^t es el subespacio generado por las columnas de A.

e) Continuando con la parte anterior mostrar que la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por las columnas de A es la multiplicación a izquierda por $(A^tA)^{-1}A^t$.

f) Volver a resolver la parte b del ejercicio usando la parte anterior.

8. Consideramos el espacio vectorial real V de los polinomios homogéneos de grado 2 en 2 variables, es decir expresiones de la forma $p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.

   a) Mostrar que la transformación $T_t : V \to V$ definida por $T_t p(x, y) = p(\cos(t)x - \sin(t)y, \cos(t)x + \sin(t)y)$ es lineal para cada t.

   b) Mostrar que $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. En particular T_t es invertible con inversa T_{-t} para todo t.

   c) Mostrar que $p(x, y) = x^2 + y^2$ es vector propio de valor propio 1 para toda T_t.

   d) Mostrar que existe un producto interno en V que es preservado por todas las transformaciones T_t. Para esto empezar con un producto interno cualquiera $\langle p, q \rangle$ y definir $\langle p, q \rangle' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle T_t p, T_t q \rangle dt$. Calcular este producto explícitamente.

   e) Usando el producto interno de la parte anterior calcular el complemento ortogonal S de $p(x, y) = x^2 + y^2$.

   f) Mostrar que $T_t S = S$ para todo t.

   g) ¿Cuales son todos los polinomios de V que son invariantes al componer con rotaciones? ¿Se te ocurre cuál sería el resultado análogo para polinomios de 3 variables?