Práctico 2

Dinámica en el círculo.

La fecha de entrega de este práctico será el miércoles 1ero de Noviembre. Habrá que entregar 8 ejercicios, con la misma regla que el primer práctico para las entregas fuera de fecha.

1. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ levantados de $f \in Hom_+(S^1)$ (es decir, tal que si $x \in \mathbb{R}$ entonces $[F(x)] = f([x])$ donde $[x] \in S^1$ denota la clase de equivalencia de x con $x \sim y$ si $y - x \in \mathbb{Z}$). Mostrar que $F - G = k \in \mathbb{Z}$ y que se cumple que $\rho(F) = \rho(G) + k$. Deducir que tiene sentido hablar de $\rho(f)$ como un real módulo $\mathbb{Z}$.

2. Sean $f, g \in Hom_+(S^1)$ y $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ levantados.

   a) Probar que si f y g conmutan, entonces $\rho(f \circ g) = \rho(f) + \rho(g)$. Concluir que $\rho(f^n) = n\rho(f)\ (mod\ 1)$.

   b) Mostrar que lo anterior no vale en general.

   c) Probar que vale $\rho(F \circ G) \leq \rho(F) + \rho(G)$.

3. Mostrar que si f es un homeomorfismo de S^1 que revierte orientación, entonces f^2 la preserva. ¿Cuál es $\rho(f^2)$?

4. Sea $f \in Hom_+(S^1)$ tal que $\rho(f) \in \mathbb{Q}$. Probar que $\Omega(f) = Per(f)$.

5. Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo del círculo que revierte orientación ($grado(f) = -1$).

   a) Mostrar que f tiene exactamente dos puntos fijos

   b) Concluir que para cualquier x, $\omega(x)$ es un punto fijo o un punto periódico de período 2.

6. Sean $f, g \in Hom_+(S^1)$ que son semiconjugados por h (es decir, $h : S^1 \to S^1$ continua, sobre y de grado 1 tal que $h \circ f = g \circ h$). Probar que $\rho(f) = \rho(g)$.

7. Sea $\rho : Hom_+(S^1) \to S^1$ la función que asocia a cada homeomorfismo creciente del círculo su número de rotación. Probar que ρ es una función continua. Sug: recordar que se cumple que

$$\left| \frac{F^{mn}(0)}{mn} - \frac{F^n(0)}{n} \right| \leq \frac{3}{n}$$

   si F es un levantado de f.

8. Sea $f : S^1 \to S^1$ conjugado a una rotación irracional. Probar que la conjugación es única a menos de una rotación, es decir, si h_1, h_2 son dos conjugaciones, entonces $h_1 = R_\beta \circ h_2$ para algún β.

9. Sea C el conjunto de Cantor usual en $[0,1]$ y α un número irracional, $0 < \alpha < 1$. Encontrar $f \in Hom_+(S^1)$ tal que $\rho(f) = \alpha$ y $\Omega(f) = C$. Sug: usar la función de Cantor y también usar (o demostrar?) que dados dos conjuntos numerables y densos A, B en $[0,1]$ entonces existe $h : [0,1] \to [0,1]$ homeomorfismo creciente tal que $h(A) = B$.

10. Sea $f \in Hom_+(S^1)$ tal que $\rho(f)$ es irracional. Probar que $\mathcal{R}(f) = S^1$.

11. Decimos que $f : M \to M$ es expansivo si exite $\alpha > 0$ tal que

$$\text{si } dist(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha \ \forall\, n \in \mathbb{Z} \text{ entonces } x = y.$$

Probar que no hay homeomorfismos expansivos en S^1. (Sug: discutir según número de rotación).

12. Sea $f : S^1 \to S^1$ un homeomorfismo tal que $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$ y tal que $\Omega(f) \neq S^1$. Mostrar que $f|_{\Omega(f)}$ es expansivo y que $f|_{\Omega(f)}$ es conjugado a un subshift de $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$.

13. Sea $f : S^1 \to S^1$ difeomorfismo de clase C^r y sea p un punto fijo (o periódico de período k) de f.

   a) Probar que si $|f'(p)| < 1$ (respec. si $|(f^k)'(p)| < 1$) entonces es atractor, es decir, existe un entorno U de p tal que si $x \in U$ entonces $f^n(x) \in U \ \forall\, n \geq 0$ y $\omega(x) = p$ (respec. $f^{nk}(x) \in U \ \forall\, n \geq 0$ y $\omega(x) = \mathcal{O}(p)$.)
   b) Probar que si $|f'(p)| > 1$ (respec. si $|(f^k)'(p)| > 1$) entonces es repulsor, es decir, existe un entorno U de p tal si $x \in U$ entonces $f^{-n}(x) \in U \ \forall\, n \geq 0$ y $\alpha(x) = p$ (respec. $f^{-nk}(x) \in U \ \forall\, n \geq 0$ y $\alpha(x) = \mathcal{O}(p)$.)

14. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = x + \frac{1}{4\pi}\sin(2\pi x) + \frac{1}{4\pi}\cos(2\pi x).$$

   a) Probar que F es el levantamiento de un difeomorfismo de S^1.
   b) hallar $\rho(F)$
   c) Hallar los puntos periódicos de F y determinar si son hiperbólicos. Clasificarlos, si corresponde, en atractores y/o repulsores.
   d) Croquizar la dinámica correspondiente en S^1.

15. Sea $f \in Diff^r(S^1)$ un difeomorfismo Morse-Smale (es decir, $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ y todos los puntos periódicos son hiperbólicos). Probar que los puntos periódicos se van alternando entre atractores y repulsores.

16. Sea $f \in Diff^r(S^1)$ tal que $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ y tal que todos sus puntos periódicos son hiperbólicos.

   a) Probar que $\#Per(f) < \infty$.
   b) Probar que existe un entorno $\mathcal{U}(f)$ de f tal que si $g \in \mathcal{U}(f)$ entonces $\#Per(g) = \#Per(f)$.
   c) Probar que f es estructuralmente estable.

17. Mostrar que si $f, g \in Hom_+(S^1)$ cumplen que $\rho(f) = \rho(g)$ entonces se cumple que existen $\varphi_n, \psi_n \in Hom_+(S^1)$ y un homeomorfismo $h \in Hom_+(S^1)$ de forma tal que $\varphi_n \circ f \circ \varphi_n^{-1}$ y $\psi_n \circ g \circ \psi_n^{-1}$ convergen a h.

18. Sea $f : S^1 \to S^1$ homeomorfismo con $\rho(f) = 0$ y sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ levantamiento con $\rho(F) = 0$. Sea $R_t : S^1 \to S^1$ la rotación de ángulo t y su levantamiento $T_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $T_t(x) = x + t$. Consideremos la función $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $h(t) = \rho(T_t \circ F)$.

    a) Probar que h es continua, creciente y que $h([0,1]) = [0,1]$.

    b) Sea $r \in [0,1]$ un número irracional. Probar que $h^{-1}(r)$ es un único punto.

    c) Sea $t_0 \in [0,1]$ tal que $h(t_0) = p/q$.

        1) Probar que si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(T_{t_0} \circ F)^q(x) < x + p$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que si $t \in [t_0, t_0 + \epsilon)$ se tiene que $h(t) = p/q$.

        2) Analogamente, si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(T_{t_0} \circ F)^q(x) > x + p$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que si $t \in (t_0 - \epsilon, t_0]$ se tiene que $h(t) = p/q$.

        3) Concluir que si $(R_{t_0} \circ f)^q \neq Id$ entonces $h^{-1}(p/q)$ es un intervalo (no trivial).

    d) Una escalera del diablo es una función $h : [0,1] \to [0,1]$ continua, sobreyectiva, monótona tal que existe un conjunto denso $A \subset [0,1]$ tal que para todo $a \in A$, $h^{-1}(a)$ es un intervalo. Demostrar que si $f : S^1 \to S^1$ homeomorfismo del circulo es tal que $(R_t \circ f)^q \neq Id$ para todo $q \geq 1$ y para todo $0 \leq t \leq 1$ entonces la funcion h definida al principio es una escalera del diablo.

19. (*Lenguas de Arnold*) Para $a, b \in [0,1]$ definimos $f_{a,b} : S^1 \to S^1$ de forma tal que $x \mapsto x + a + b\sin(2\pi x)$ $(mod\ 1)$.

    a) Probar que están bien definidos y son difeomorfismos del círculo.

    b) Para $p/q \in [0,1]$ definimos $A_{p/q} = \{(a,b) : \rho(f_{a,b}) = p/q\}$. Mostrar que son cerrados que cortan $[0,1] \times \{0\}$ en el punto $(p/q, 0)$.

    c) Mostrar que para todo $t \in (0,1]$ se cumple que $A_{p/q}$ intersecta $[0,1] \times \{t\}$ en un intervalo cerrado con interior no vacío.

    d) Mostrar que los $A_{p/q}$ son conexos (las 'lenguas').

    e) Mostrar que la unión de los $A_{p/q}$ es densa en $[0,1] \times [0,1]$. (Comentario: Para varios valores de t se cumple que la medida de Lebesgue del complemento en $[0,1] \times \{t\}$ es positiva.)