Práctico 2

September 20, 2023

Dado un proceso de Wiener $\{W(t) : t \geq 0\}$, notaremos por W_t a $W(t)$.

Contents

1 Ejercicio 1

Sea $\{W(t) \colon t \geq 0\}$ un proceso de Wiener. (a) Demostrar

$$\mathbb{E}(W(s)W(t)) = \min(s, t).$$

(b) Demostrar

$$\mathbb{E}(|W(t) - W(s)|^2) = |t - s|.$$

(c) Calcular la función característica

$$f(\lambda) = \mathbb{E}(\exp(i\lambda W(t))).$$

Solución

a) Asumamos que $s \leq t$,

$$\mathbb{E}(W_t W_s) = \mathbb{E}((W_t - W_s + W_s)W_s) = \mathbb{E}((W_t - W_s)W_s) + \mathbb{E}(W_s^2) \tag{1}$$

Por la propiedad de incrementos independientes y homogéneos, el primer sumando da cero, mientras que por la propiedad de distribución normal $W_s \sim N(0, s)$, el segundo sumando es exactamente $\textbf{var}(W_s) = s$. Si $t \leq t$, se cumple $\mathbb{E}(W_t W_s) = t$.

b) Consideremos $s \leq t$,

$$\mathbb{E}((W_t - W_s)^2) = \mathbb{E}(W_t^2 + W_s^2 - 2W_tW_s) = t + s - 2s = t - s. \tag{2}$$

Si $t \leq s$, se cumple $\mathbb{E}((W_t - W_s)^2) = s - t$.

c) Como $W_t \sim N(0, t)$, entonces es la función característica de una v.a. normal,

$$f(\lambda) = \mathbb{E}(e^{i\lambda W_t}) = e^{-\frac{1}{2}t\lambda^2} \tag{3}$$

2 Ejercicio 2

Sea $\{W_t\}$ un proceso de Wiener. Demostrar que los siguientes procesos aleatorios son procesos de Wiener:

(a) $\{-W_t\}$;

(b) $\{\sqrt{c}W_{t/c}\}$, donde $c > 0$;

(c) $\{W_{T+t} - W_T\}$, donde $T > 0$.

Solución

a) Inmediato verificar las cuatro propiedades de poroceso de Wiener.

b) Las propiedades (i) a (iii) son inmediatas, la propiedad (iv) se deduce de la propiedad de escala de la distribución normal,

$$\sqrt{c}W_{(t+h)/c} - \sqrt{c}W_{t/c} \sim \sqrt{c}N(0, h/c) = N(0, h) \tag{4}$$

c) Inmediato verificar las cuatro propiedades de poroceso de Wiener.

3 Ejercicio 3

El siguiente ejercicio muestra que las trayectorias de un proceso de Wiener presentan un comportamiento diferente al de las funciones diferenciables: su variación en un intervalo $[0, T]$ no existe, es infinita; y su variación cuadrática en un intervalo $[0, T]$ es igual a T. Consideremos con ese fin, para cada N, la partición diádica $\{t_0^N = 0, t_1^N = 1/2^N, \ldots, t_{2^N}^N = 1\}$.

(a) Demostrar que se verifica:

$$V_N = \sum_{k=1}^{2^N} \left| W_{t_k^N} - W_{t_{k-1}^N} \right| \to \infty \quad (N \to \infty) \quad c.s.$$

Sugerencias: (i) Demostrar que $V_N(\omega) \leq V_{N+1}(\omega)$ y concluir que existe el límite (casi seguro) de $\{V_N\}$. (ii) Estudiar el límite en probabilidad de V_N y utilizar la unicidad del límite en probabilidad.

(b) Demostrar que se verifica:

$$Q_N = \sum_{k=1}^{2^N} \left(W_{t_k^N} - W_{t_{k-1}^N} \right)^2 \to T \quad (N \to \infty)$$

en media cuadrática, es decir demostrar que

$$\mathbb{E}\big(Q_N - T\big)^2 \to 0 \quad (N \to \infty) \tag{5}$$ {q}

Sugerencia: considerar las variables $Y_k = \big(W_{t_k^N} - W_{t_{k-1}^N}\big)^2 - (t_k^N - t_{k-1}^N)$, observar que $Q_N - T$ es la suma de las Y_k, y calcular el segundo momento en (5).

Solución

En el Cap. 10 del libro Teoría de la Probabilidad, Petrov-Mordecki. Para probar que $\{V_N(\omega)\}_N$ es creciente, usamos la desigualdad triangular en los intervalos consecutivos $[t_{2k-2}^{N+1}, t_{2k-1}^{N+1}]$ y $[t_{2k-1}^{N+1}, t_{2k}^{N+1}]$, notando que $t_{2k}^{N+1} = t_k^N$,

$$\begin{aligned} V_{N+1} &= \sum_{k=1}^{2^{N+1}} |W_{t_k^{N+1}} - W_{t_{k-1}^{N+1}}| = \sum_{k=1}^{2^N} |W_{t_{2k}^{N+1}} - W_{t_{2k-1}^{N+1}}| + |W_{t_{2k-1}^{N+1}} - W_{t_{2k-2}^{N+1}}| && (6)\\ &\geq \sum_{k=1}^{2^N} |W_{t_{2k}^{N+1}} - W_{t_{2k-2}^{N+1}}| && (7)\\ &= \sum_{k=1}^{2^N} |W_{t_k^N} - W_{t_{k-1}^N}| = V_N. && (8) \end{aligned}$$

4 Ejercicio 4

Sea considera el proceso aleatorio definido mediante

$$B_t = W_t - tW_1 \qquad (0 \leq t \leq 1), \tag{9}$$ {e10:puent

denominado *puente browniano*, donde $\{W_t\}$ es un proceso de Wiener. Demostrar que $P(B_0 = 0) = P(B_1 = 0) = 1$, $\mathbb{E}B_t = 0$, $\mathbb{E}B_sB_t = s(1-t)$ si $0 \leq s \leq t \leq 1$. Demostrar que el proceso $\{B_{1-t}\}_{0 \leq t \leq 1}$ es un puente Browniano, es decir, existe un proceso de Wiener tal que se verifica (9).

Solución

$$\begin{aligned} P(B_0 = 0) &= P(W_0 = 0) = 1 && (10)\\ P(B_1 = 0) &= P(W_1 - W_1 = 0) = 1 && (11)\\ \mathbb{E}(B_0) &= \mathbb{E}(W_0) = 0 && (12)\\ \mathbb{E}(B_sB_t) &= \mathbb{E}(W_sW_t - sW_1W_t - tW_1W_s + stW_1^2) = s - s - t + st = s(1-t) && (13) \end{aligned}$$

Consideremos $\{B_{1-t}\}_{0 \leq t \leq 1}$ el proceso inverso. Entonces,

$$\begin{aligned} B_{1-t} &= W_{1-t} - (1-t)W_1 = W_{1-t} - W_1 + tW_1 && (14)\\ &= (W_{1-t} - W_1) - t(W_0 - W_1) && (15) \end{aligned}$$

es un puente Browniano con proceso de Wiener asociado $\{W_{1-t} - W_1\}$ (ver ejercicio 2).

5 Ejercicio 5

(a) Sea (X, Y) un vector gaussiano. Para calcular

$$\mathbb{E}(Y \mid X)$$

se suma y resta αX y se determina α de forma que $Y + \alpha X$ y X sean independientes. Hallado tal α, se tiene

$$\mathbb{E}(Y \mid X) = \mathbb{E}(Y + \alpha X - \alpha X \mid X) = \mathbb{E}(Y + \alpha X) - \alpha X.$$

Calcular entonces α.

(b) Calcular

$$\mathbb{E}(W(s) \mid W(t)), \quad 0 \leq s \leq t.$$

Solución

a) Como $Y + \alpha X$ y X son independientes, tenemos

$$0 = \mathbb{E}((Y + \alpha X - \mathbb{E}(Y + \alpha X))(X - \mathbb{E}X)), \tag{16}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}((Y - \mathbb{E}Y)(X - \mathbb{E}X)) + \alpha \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(X - \mathbb{E}X)) && (17) \\ &= \mathbf{cov}(X, Y) + \alpha \mathbf{var} X, && (18) \end{aligned}$$

de donde,

$$\alpha = -\frac{\mathbf{cov}(X, Y)}{\mathbf{var} X}. \tag{19}$$

b) Tenemos dos formas de resolverlo: usando la parte anterior, o simplemente calculando a partir de las propiedades de proceso de Wiener,

$$0 = \mathbb{E}(W_t - W_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s | W_s) = \mathbb{E}(W_t | W_s) - W_s, \tag{20}$$

donde usamos que $W_t - W_s$ y W_s son idependientes.

6 Ejercicio 6

Sean $\{W_t\}$ un proceso de Wiener, y $0 \leq s_1 < t_1 < \cdots < s_n < t_n$ tiempos arbitrarios.
(a) Demostrar que $|W_{s_1}|, |W_{t_1} - W_{s_1}|, \ldots, |W_{t_n} - W_{s_n}|$ son v.a. independientes.
(b) Demostrar que $W_{s_1}^2, (W_{t_1} - W_{s_1})^2, \ldots, (W_{t_n} - W_{s_n})^2$ son v.a. independientes.

Solución

7 Ejercicio 7

Sea $\{W_t\}$ un proceso de Wiener. Calcular las siguientes esperanzas condicionales, dado $0 \leq s < t$.

(a) $\mathbb{E}(W_t \mid W_s) = W_s$;

(b) $\mathbb{E}\left(W_t^2 - t \mid W_s\right) = W_s^2 - s$.

(c) $\mathbb{E}(\exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2) \mid W_s) = \exp(\sigma W_s - \sigma^2 s/2)$.

Solución

(a) Hecho en ej. 5.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_t^2 - t|W_s) &= \mathbb{E}((W_t - W_s + W_s)^2 - t|W_s) &(21)\\
&= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s) + W_s^2 - t|W_s) &(22)\\
&= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2) + 2W_s\mathbb{E}((W_t - W_s)|W_s) + W_s^2 - t &(23)\\
&= t - s + W_s^2 - t = W_s^2 - s &(24)
\end{aligned}$$

(c) Usamos que $W_t - W_s \sim N(0, t-s)$, que es independiente con W_s y que la función característica evaluada en $i\sigma$ es la generatriz de momentos,

$$\mathbb{E}(\exp(\sigma(W_t - W_s)) \mid W_s) = \mathbb{E}(\exp(\sigma(W_t - W_s))) = f(i\sigma) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2(t-s)}, \qquad (25)$$

de donde se deduce la identidad.