Práctico 3

1. Sea $\{e_{ij} : \ i,j=1,\dots,n\}$ la base canónica de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$. Sean $h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$, $e_i = e_{i,i+1}$ y $f_i = e_{i+1,i}$.
   a) Probar que $\mathcal{B} = \{e_{ij} : \ i \neq j\} \cup \{h_i : \ i = 1,\dots,n-1\}$ es una base de $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$. Hallar $\dim \mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$.
   b) Probar que $\Bbbk\{e_i, f_i, h_i\}$ es una subálgebra de $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ isomorfa a $\mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$.
   c) Probar $[\mathfrak{sl}_n(\Bbbk), \mathfrak{sl}_n(\Bbbk)] = \mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$. Deducir $[\mathfrak{gl}_n(\Bbbk), \mathfrak{gl}_n(\Bbbk)] = \mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$.
2. Sea L un álgebra. Probar que si $x, y \in L$ verifican $[x,y] \neq 0$, entonces $\Bbbk\{x,y\} \cap Z(L) = \{0\}$.
   Deducir que si L no es abeliana, entonces $\dim Z(L) \leq \dim L - 2$.
3. Determinar el centro de cada una de las álgebras de dimensión 3 $\left(\overline{\Bbbk} = \Bbbk\right)$.
4. *a*) Probar $Z\big(\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)\big) = \mathfrak{e}_n(\Bbbk)$ (el subespacio de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ formado por las matrices escalares[1]).
   b) Probar $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk) = \mathfrak{sl}_n(\Bbbk) \oplus \mathfrak{e}_n(\Bbbk)$. Deducir $Z\big(\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)\big) = \{0\}$.
   c) Deducir que $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ es isomorfa a la suma directa (externa) de $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ y $\Bbbk$.
5. Sean H y K dos álgebras. Consideramos $L = H \oplus K$. Probar $Z(L) = Z(H) \oplus Z(K)$ y $L' = H' \oplus K'$, pensando H y K contenidas en L .
6. Sea $L = \mathfrak{gl}(V)$, siendo V un espacio vectorial de dimensión n.
   a) Probar que si $x \in L$ es diagonalizable y tiene n valores propios (con multiplicidad) $a_1,\dots,a_n$, entonces $\mathrm{ad}_x \in \mathfrak{gl}(L)$ es diagonalizable y sus valores propios son los n^2 escalares $a_i - a_j$.
   b) Probar que si $x \in L$ es nilpotente, entonces $\mathrm{ad}_x \in \mathfrak{gl}(L)$ es nilpotente.
   Sugerencia: escribir $\mathrm{ad}_x = L_x - R_x$, siendo $L_x(y) = xy$ y $R_x(y) = yx$, y probar que L_x y R_x son elementos del álgebra asociativa $\mathcal{L}(L)$ que son nilpotentes y conmutan.
7. Sea $B = \{e_1,\dots,e_n\}$ una base de un álgebra L y $\delta \in \mathcal{L}(L)$. Probar que δ es una derivación de L si y solo si $\delta([e_i,e_j]) = [\delta(e_i),e_j] + [e_i,\delta(e_j)]$, para todo $i<j$.
8. Sea $L = \mathfrak{n}_3(\Bbbk)$ el álgebra de Heisemberg.
   a) Probar $\dim \mathrm{Der}(L) = 6$. *Sugerencia*: recordar el ejercicio anterior.
   b) Identificar las derivaciones internas $\mathrm{ad}(L)$ dentro de $\mathrm{Der}(L)$.
   c) Probar $\mathrm{Der}(L)/\mathrm{ad}(L) \simeq \mathfrak{gl}_2(\Bbbk)$ como álgebras de Lie.
9. Sea (X,μ) un álgebra abstracta y $\delta \in \mathrm{Der}(X)$. Escribimos $\mu(x,y) = x * y$. Probar por inducción en n:
$$(\delta - (a+b)\,\mathrm{id})^n(x*y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\delta - a\,\mathrm{id})^{n-i}(x) * (\delta - b\,\mathrm{id})^i(y), \quad \forall a,b \in \Bbbk,\ x,y \in X,\ n \in \mathbb{N}.$$
   Notar que la fórmula anterior implica $\delta^n(x*y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \delta^i(x) * \delta^{n-i}(y)$, para todo $x,y \in X,\ n \in \mathbb{N}$.

[1]Una *matriz escalar* es una matriz diagonal en la cual los elementos de la diagonal principal son todos iguales.

10. Un *automorfismo* de un álgebra L es un isomorfismo de álgebras de L en L. Al conjunto de automorfismos de L lo escribiremos $\mathrm{Aut}(L)$. Notar que $\mathrm{Aut}(L)$ es un grupo respecto a la composición.

   a) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ es nilpotente, entonces tiene sentido definir $e^{\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^k}{k!} := \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^k}{k!}$, siendo n tal que $\varphi^{n+1} = 0$.

      1) Probar que si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$ son nilpotentes y conmutan, entonces $e^{\varphi} e^{\psi} = e^{\varphi+\psi}$.
      Sugerencia: notar que si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$ son nilpotentes, entonces $e^{\varphi} e^{\psi} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \frac{1}{i!\,j!} \varphi^i \psi^j \right)$.

      2) Deducir que si $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ es nilpotente, entonces $e^{\varphi} \in \mathrm{GL}(V) := \{\varphi \in \mathcal{L}(V) : \varphi \text{ es invertible}\}$.

   b) Probar que si δ es una derivación nilpotente de un álgebra de Lie L, entonces $e^{\delta} \in \mathrm{Aut}(L)$.
   Sugerencia: para probar que e^{δ} es un morfismo, recordar el ejercicio 9.

   c) Sean $\varphi \in \mathrm{Aut}(L)$ y $x \in L$ tal que ad_x es nilpotente. Probar $\varphi e^{ad_x} \varphi^{-1} = e^{\mathrm{ad}_{\varphi(x)}}$.

11. Sea L una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, siendo V un espacio vectorial de dimensión finita.

   a) Probar que si $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$ verifica $\varphi L \varphi^{-1} \subset L$, entonces el mapa $\hat{\varphi} : L \to L$ definido por $\hat{\varphi}(\psi) = \varphi \psi \varphi^{-1}$ es un automorfismo de L.

   b) Probar que si $L = \mathfrak{sl}(V)$, entonces vale $\varphi L \varphi^{-1} = L$, para todo $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$.

   c) Probar que si $x \in L$ es un elemento nilpotente en $\mathcal{L}(V)$, entonces $e^{\mathrm{ad}_x}(y) = e^x\, y\, e^{-x}$, para todo $y \in L$. *Sugerencia:* escribir $\mathrm{ad}_x = L_x - R_x$, siendo $L_x(y) = xy$ y $R_x(y) = yx$.

Nota: Los automorfismos de un álgebra L de la forma e^{ad_x} con ad_x nilpotente se llaman *internos* y los otros *externos*. Si llamamos $\mathrm{Int}(L)$ al subgrupo de $\mathrm{Aut}(L)$ generado por los automorfismos internos, entonces el ejercicio 10*c* muestra que $\mathrm{Int}(L)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(L)$.