Práctico 4

1. Estudiar la solubilidad y nilpotencia de las álgebras de dimensión 3, para $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.

2. Sea $\{e_{ij}\}$ la base canónica de $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{k})$.

    a) Probar $\mathfrak{n}_n(\mathbb{k})^k = \mathbb{k}\{e_{ij} : \; j - i > k\}$, para todo $k = 0, 1, \ldots$ Deducir que $\mathfrak{n}_n(\mathbb{k})$ es nilpotente.

    b) Probar que $\mathfrak{b}_n(\mathbb{k})$ es un álgebra soluble que no es nilpotente.

3. Sea L un álgebra de Lie. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes.

    a) El álgebra L es soluble.

    b) Existe una cadena de subálgebras $L = L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_k = 0$ tal que L_{i+1} es un ideal de L_i y L_i/L_{i+1} es abeliana, para todo $i = 0, \ldots, k-1$.

    c) Existe una cadena de subálgebras $L = L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_h = 0$ tal que L_{i+1} es un ideal de L_i y L_i/L_{i+1} tiene dimensión uno, para todo $i = 0, \ldots, h-1$.

    Sugerencia: probar *a*) $\Leftrightarrow$ *b*) y *b*) $\Leftrightarrow$ *c*); para *b*) $\Rightarrow$ *a*), probar $L^{(i)} \subset L_i$, para todo $i = 0, \ldots, k$.

4. Probar que si L_2 es una extensión de L_1 por L_3, entonces L_2 es soluble si y solo si L_1 y L_3 son solubles.

5. Probar que si L_2 es una extensión central de L_1 por L_3, entonces L_2 es nilpotente si y solo si L_1 y L_3 son nilpotentes. Mostrar con un ejemplo que la afirmación es falsa si la extensión no es central.

6. Probar que L es nilpotente si y solo si existe una cadena de ideales $L = L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_k = 0$ tal que $L_{i+1} \subset L_i$ y $L_i/L_{i+1} \subset Z\left(L/L_{i+1}\right)$, para todo $i = 0, \ldots, k-1$.

7. Sean I, J ideales de un álgebra L.

    a) Probar por inducción completa:

        1) El ideal $(I + J)^k$ está generado por los elementos de la forma $[x_1, [x_2, \cdots, [x_k, x_{k+1}] \cdots]]$, siendo $x_1, \ldots, x_{k+1} \in I \cup J$, para todo $k \geq 1$.

        2) Dados $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1} \in L$, si $x_{i_j} \in I$ para ciertos i_j con $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq k+1$, entonces $[x_1, [x_2, \cdots, [x_k, x_{k+1}] \cdots]] \in I^{p-1}$.

    b) Probar que si I, J son nilpotentes, entonces $I + J$ es un ideal nilpotente. Deducir que en L existe un único ideal nilpotente maximal llamado el *nilradical* de L, que escribiremos $\operatorname{nilrad}(L)$.

8. Calcular el radical y el nilradical para las álgebras de dimensión 3 ($\mathbb{k} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{k} = \mathbb{R}$).