**Universidad de la República**
**Facultad de Ciencias**
**Centro de Matemática**

*Análisis Funcional–Curso 2023*

# Práctico 5

1. Demostrar que si $X$ es un espacio normado tal que $X'$ es separable, entonces $X$ mismo lo es. (sugerencia: si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión densa en $X'$, tomar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $X$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $|\varphi_n(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|\varphi_n\|$, para cada $n$; mostrar entonces que el subespacio generado por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es denso en $X$).

2. Sea $X$ un espacio vectorial topológico. Probar que la topología débil* de $X'$ es metrizable si y sólo si $X$ posee una base de Hamel finita o numerable.

3. Sea $B$ la bola unidad cerrada de $M[0,1]$. Para $\mu, \nu \in M[0,1]$ se define $d(\mu,\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\int_{[0,1]} x^n d\mu - \int_{[0,1]} x^n d\nu|$. Probar que $d$ es una métrica en $M[0,1]$ que define la topología $w^*$ en $B$ pero no en $M[0,1]$.

4. Sea $X$ un espacio normado. Demostrar que:

   *a*) $X'$ es unión numerable de conjuntos débilmente* compactos $E_n$.

   *b*) Si $X$ es separable, cada $E_n$ es metrizable. Así pues, la topología débil* es separable, y un cierto subconjunto numerable de $X'$ separa puntos de $X$.

   *c*) Si $K$ es un conjunto débilmente compacto de $X$, y si $x_0 \in K$ es un punto de acumulación débil de un cierto subconjunto numerable $E \subseteq K$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ en $E$ que es débilmente convergente hacia $x_0$ (indicación: sea $Y$ el mínimo subespacio cerrado de $X$ que contenga a $E$; aplicar a $Y$ la parte (b) para deducir que la topología de $K \cap Y$ es metrizable)

      *Observación:* el objetivo de (c) es probar la existencia de *subsucesiones* convergentes, más bien que de *subredes*. Nótese que existen espacios de Hausdorff compactos en los que ninguna sucesión de puntos distintos es convergente.

5. Sea $K$ el menor conjunto convexo de $\mathbb{R}^3$ que contiene a los puntos $(1,0,1)$, $(1,0,-1)$ y $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, $\forall\theta \in [0,2\pi]$. Demostrar que $K$ es compacto, pero que $\operatorname{ext}(K)$ no lo es. ¿Puede existir en $\mathbb{R}^2$ un conjunto así?

6. Mostrar que la bola unidad cerrada de $\ell^1$ es la envolvente convexa cerrada de sus puntos extremales.

7. Sea $p \in (0,1)$. Mostrar que existe un subconjunto compacto $K$ de $\ell^p$ cuya envolvente convexa no es acotada (sugerencia: considerar $x_n \in \ell^p$ definida por $x_n^{(n)} = n^{p-1}$ y $x_n^m = 0$ si $m \neq n$. Sea $K := \{0, x_1, x_2, \ldots\}$; si $y_n = (x_1 + \cdots + x_n)/n$, $n \geq 1$, demostrar que la sucesión $(y_n)$ no está acotada en $\ell^p$).

8. Mostrar que $L^1([0,1])$ no es un espacio dual.

9. Para $p \in (1,\infty)$, probar que cada punto de la "superficie" de la bola cerrada unitaria de $L^p[0,1]$ es un punto extremal de esta bola.

10. Mostrar que ninguno de los siguientes espacios es reflexivo: $c_0$, $c$, $\ell^\infty$.

11. *Teorema del punto fijo de Markov–Kakutani.* Supongamos que $X$ es un espacio localmente convexo y de Hausdorff, $K \subseteq X$ es compacto y convexo, y que $\mathcal{F}$ es una familia de transformaciones afines[1] continuas en $X$ tales que $T(K) \subseteq K$ y $T_1 T_2 = T_2 T_1$, $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{F}$.

    *a)* Dado $T \in \mathcal{F}$ sea $T^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j$. Probar que $T^{(n)}(K) \subseteq K$ y que $T_1^{(m)} T_2^{(n)} = T_2^{(n)} T_1^{(m)}$, $\forall n, m \geq 0$, $T_1, T_2 \in \mathcal{F}$.

    *b)* Sea $\mathcal{C} := \{T^{(n)}(K) : n \geq 0, T \in \mathcal{F}\}$. Probar que $\bigcap\{C : C \in \mathcal{C}\} \neq \emptyset$ (sugerencia: mostrar que $\mathcal{C}$ tiene la propiedad de intersección finita).

    *c)* Sea $c \in \bigcap\{C : C \in \mathcal{C}\}$. Probar que $Tc = c$, $\forall T \in \mathcal{F}$ (sugerencia: notar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x \in K$ tal que $T^{(n)}x = c$; deducir que $Tc - c \in \frac{1}{n}(K - K)$, y recordar que todo conjunto compacto es acotado).

12. Sean $G$ un grupo abeliano, $\Omega$ un espacio de Hausdorff compacto, y $\alpha : G \times \Omega \to \Omega$ una acción continua. Se dice que una medida de probabilidad $\mu \in M(\Omega)$ es $\alpha$–invariante si $\mu(\alpha_t(E)) = \mu(E)$, $\forall E \in \mathcal{B}(\Omega)$, donde $\mathcal{B}(\Omega)$ es la $\sigma$–álgebra de borelianos de $\Omega$. Denotaremos por $\mathsf{M}_\alpha$ al conjunto de medida $\alpha$–invariantes.

    *a)* *Existencia de medidas invariantes.* Demostrar que $\mathsf{M}_\alpha \neq \emptyset$ (sugerencia: combinar los teoremas de Banach–Alaoglu y el del punto fijo de Markov–Kakutani).

    *b)* *Existencia de medidas ergódicas.* Probar que existe una medida de probabilidad $\mu \in M(\Omega)$ tal que el sistema $(G, \Omega, \alpha, \mu)$ es ergódico, es decir, $\mu$ es $\alpha$–invariante y además si $E \in \mathcal{B}(\Omega)$ es $\alpha$–invariante, entonces $\mu(E) = 0$ o $\mu(E) = 1$ (sugerencia: mostrar que $\mathsf{M}_\alpha$ es convexo y $w^*$–compacto, y luego acudir al teorema de Krein–Milman).

[1] Sea $C$ un subconjunto convexo de un espacio vectorial $X$, y sea $Y$ un espacio vectorial. Se dice que $S : C \to Y$ es afín si $S((1-t)x + ty) = (1-t)Sx + tSy$, $\forall t \in [0, 1]$.