Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2023

Práctico 5: Valores singulares, Proyección ortogonal, y Mínimos cuadrados.

1. Este ejercicio es del libro de Demmel "Applied numerical linear algebra".

   Supongamos que una matriz A tiene descomposición de valores singulares $U\Sigma V^t$ donde U, V son ortogonales (posiblemente de distintos tamaños) y las entradas de Σ no nulas están en la diagonal principal, son no-negativas, y están ordenadas de mayor a menor empezando con $\Sigma_{1,1} \geq \Sigma_{2,2} \geq \cdots$.

   Mostrar que si A es $m \times n$ y A^tA es invertible entonces $m \geq n$.

   Asumiendo que A^tA es invertible, calcular la descomposición de valores singulares de las siguientes matrices (asumiendo que las inversas que aparecen existen):

   a) $(A^tA)^{-1}$.
   b) $(A^tA)^{-1}A^t$
   c) $A(A^tA)^{-1}$
   d) $A(A^tA)^{-1}A^t$.

2. Este ejercicio es del libro de Demmel "Applied numerical linear algebra".

   La pseudo-inversa de una matriz A que es $m \times n$ con $m \geq n$ y columnas linealmente independientes se define como $A^\dagger = A^t(A^tA)^{-1}$.

   Mostrar que $\|AX - I\|_F$ es minimizada por $X = A^\dagger$ donde I es la identidad $n \times n$.

3. Encontrar la ecuación $y = ax + b$ que ajusta los datos $(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)$ lo mejor posible en mínimos cuadrados. Escribir el sistema lineal con cuatro ecuaciones que debería satisfacer (a, b) para que los 4 puntos pertenezcan a la recta.

4. Encontrar el punto más cercano a $v = (7, 8, 9)$ en subespacio P de dimensión 2 generado por los vectores $(1, 2, 0)$ y $(0, 3, 4)$. Encontrar también la proyección ortogonal de v sobre $P^\perp$.

5. Este ejercicio es del libro de Strang "Linear Algebra and its applications".

   Encontrar x, y, z para que la siguiente matriz sea ortogonal

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & x \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & y \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-3}{\sqrt{14}} & z \end{pmatrix}.$$

6. Este ejercicio es del libro de Strang "Linear Algebra and its applications".

   Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a los vectores $(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$ (en ese orden).

7. Se considera el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ dado por $S = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \; x + y = z + t, \; z = 2t\right\}$.

   a) Hallar una base ortogonal de S.

b) Hallar una base otogonal de $S^{\perp}$.

8. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Hallar la proyección del vector $(0, 0, 0, 1)$ al espacio fila de A.

9. En el espacio vectorial de las funciones continuas en $[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$, ¿cuál es la línea recta más próxima a la parábola $y = x^2$?