Facultad de Ciencias, UdelaR. **Álgebras de Lie, curso 2023.**

Práctico 5

1. Probar que toda álgebra nilpotente L admite una bandera de ideales $\{0\} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = L$. *Nota:* si $\overline{\Bbbk} = \Bbbk$ es consecuencia del teorema de Lie; lo interesante es probarlo para $\Bbbk$ arbitrario.

2. Sea L un álgebra de Lie. Probar que si L es nilpotente, entonces toda subálgebra bidimensional de L es abeliana. Probar que si el cuerpo es algebraicamente cerrado, entonces vale también el recíproco. *Sugerencia:* aplicar el segundo teorema de Engel.

3. Sea $L \neq \{0\}$ un álgebra nilpotente y $K \neq \{0\}$ un ideal de L.

   a) Probar $K \cap Z(L) \neq \{0\}$.

   b) Probar $C_L(K) \neq \{0\}$, siendo $C_L(K)$ el centralizador de K en L.

4. Sea L un álgebra de Lie, H una subálgebra de L y $N_L(H)$ el normalizador de H en L.

   a) Probar que tiene sentido definir $\varphi : N_L(H) \mapsto \mathfrak{gl}(L/H)$ mediante $\varphi_x(\overline{y}) = \overline{[x,y]}$, $\forall x, y \in L$.

   b) Probar que si L es nilpotente y H es una subálgebra propia de L, entonces H está contenida estrictamente en $N_L(H)$.

5. Sea $L \neq \{0\}$ un álgebra nilpotente. El objetivo es probar que L contiene una derivación externa.

   a) Probar que existen $K \lhd L$ y $0 \neq x_0 \in L$ tales que $L = K \oplus \Bbbk\{x_0\}$. *Sug.:* recordar el ejercicio 1.

   b) Notar $C_L(K) \neq \{0\}$ (ejercicio 3*b*). Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $C_L(K) \subset L^n$ y $C_L(K) \not\subset L^{n+1}$ y elegimos $z_0 \in C_L(K) \setminus L^{n+1}$. Sea $\delta : L \to L$ el mapa lineal que es nulo en K y lleva x_0 en z_0. Probar que δ es una derivación externa. *Sugerencia:* ver que si $\delta = \mathrm{ad}_t$, entonces $t \in C_L(K)$.

6. Sea L un álgebra de Lie que contiene un ideal K tal que L/K es nilpotente y $\mathrm{ad}_x|_K : K \to K$ es nilpotente para todo $x \in L$. Probar que L es nilpotente.

7. Sea V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita, con $\overline{\Bbbk} = \Bbbk$.

   a) Probar que si L es una subálgebra soluble de $\mathfrak{gl}(V)$, entonces todo elemento de $[L, L]$ es una transformación lineal nilpotente.

   b) Sean $x, y : V \to V$ dos transformaciones lineales. Usar la parte anterior para probar que si x e y conmutan con $[x, y] = xy - yx$, entonces $[x, y] : V \to V$ es nilpotente.