Facultad de Ciencias, UdelaR. **Álgebras de Lie, curso 2023.**

Práctico 6

1. Sea L un álgebra y κ su forma de Killing.

   a) Probar que si $\delta : L \to L$ una derivación, entonces $\kappa(\delta(x), y) + \kappa(x, \delta(y)) = 0, \ \forall x, y \in L$.

   b) Probar que si $\varphi : L \to L$ es un automorfismo, entonces $\kappa(\varphi(x), \varphi(y)) = \kappa(x, y), \ \forall x, y \in L$.

2. Probar que la forma de Killing de $\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)$ es

$$\kappa(x, y) = 2n\,\mathrm{tr}(xy) - 2\,\mathrm{tr}(x)\,\mathrm{tr}(y), \quad \forall x, y \in \mathfrak{gl}_n(\Bbbk).$$

   Sugerencia: probar que si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base de un espacio vectorial V y $\varphi \in \mathfrak{gl}(V)$, entonces $\mathrm{tr}(\varphi) = \sum_{i=1}^n e_i^*\big(\varphi(e_i)\big)$. Deducir que la forma de Killing de $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ es

$$\kappa(x, y) = 2n\,\mathrm{tr}(xy), \quad \forall x, y \in \mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$$

3. Probar que $\beta : \mathrm{gl}_n(\Bbbk) \times \mathrm{gl}_n(\Bbbk) \to \Bbbk$ definida por $\beta(x, y) = \mathrm{tr}(xy)$ es una forma bilineal no degenerada. Deducir que $\mathfrak{sl}_n(\Bbbk)$ es semisimple.

4. Probar que si L es nilpotente, entonces la forma de Killing de L es idénticamente nula.

5. Hallar la forma de Killing para cada una de las álgebras complejas de dimensión 3.

6. Dar ejemplos de:

   a) Un álgebra L para la cual $L' \subsetneq L^\perp$.

   b) Un álgebra no nilpotente cuya forma de Killing sea nula.

   c) Un álgebra L que contenga una subálgebra H, tal que la forma de Killing de H no coincide con la restricción a H de la forma de Killing de L.

7. Sea L un álgebra y K, H dos ideales tales que $L = K \oplus H$. El objetivo del ejercicio es probar $\mathrm{rad}(L) = \mathrm{rad}(K) \oplus \mathrm{rad}(H)$.

   a) Probar $\mathrm{rad}(K) \oplus \mathrm{rad}(H) \subset \mathrm{rad}(L)$.

   b) Probar que si $A \subset \mathrm{rad}(L)$ es un ideal de L tal que $\mathrm{rad}\,(L/A) = 0$, entonces $A = \mathrm{rad}(L)$.

   c) Probar que si $I \subset K$ y $J \subset H$ son ideales, entonces $\frac{L}{I \oplus J} \simeq K/I \oplus H/J$ como álgebras.

   d) Probar $\mathrm{rad}(L) = \mathrm{rad}(K) \oplus \mathrm{rad}(H)$.

8. Probar $\mathrm{rad}(\mathfrak{gl}_n(\Bbbk)) = \mathfrak{e}_n(\Bbbk) = Z(\mathfrak{gl}_n(\Bbbk))$. *Sugerencia*: recordar el ejercicio 4 del práctico 3.