Repartido 5. Momento angular y rotaciones

1. Sea $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ el operador de momento angular orbital de un sistema cuyo espacio de estados es $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ (espacio de funciones de la posición).

Calcule las relaciones de conmutación siguientes:

a) $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$

b) $[L_i, R_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}R_k$

c) $[L_i, P_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}P_k$

d) $[L_i, \vec{P}^2] = [L_i, \vec{R}^2] = [L_i, \vec{R}.\vec{P}] = 0$

2. Partiendo de $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P}$ en la representación de posición $\{|\vec{r}\rangle\}$, muestre que

$$\vec{L} = -i\hbar \left(\hat{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\hat{e}_\theta}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right)$$

en coordenadas esféricas.

3. Calcule las matrices J^2, J_z, $J\pm$, J_x y J_y para $j = 1$. Verifique las relaciones de conmutación de las mismas.

4. a) Pruebe que para una partícula en un potencial $V(\vec{r})$ la tasa de cambio del valor esperado del momento angular orbital $\vec{L}$ es igual al valor esperado del torque $\vec{M} = \vec{R} \times (-\nabla V)$ (análogo rotacional del Teorema de Ehrenfest)

$$\frac{d}{dt}\langle\vec{L}\rangle = \langle\vec{M}\rangle$$

b) Muestre que $\frac{d}{dt}\langle\vec{L}\rangle = 0$ para cualquier potencial central $V(\vec{r}) = V(r)$. Esto es un enunciado cuántico de la conservación del momento angular.

5. Un haz de partículas se somete a una medida simultánea de las variables de momento angular $\vec{L}^2$ y L_z. Los resultados que arroja la medida son los autovalores de índices $(l = 0, m = 0)$ con probabilidad $3/4$ y $(l = 1, m = -1)$ con probabilidad $1/4$.

a) Escriba una expresión para el estado del haz inmediatamente antes de la medida.

b) Las partículas del haz con $(l = 1, m = -1)$ son separadas y sometidas a una medida de L_x, ¿cuáles son los posibles resultados y sus probabilidades?

c) Construya las funciones de onda espaciales que pueden resultar de la segunda medida.

6. Un sistema tiene por función de onda $\psi(x,y,z) = N(x+y+z)e^{-r^2/a^2}$, con N una constante de normalización y a real.

Los observables L_z y $\vec{L}^2$ son medidos, ¿cuáles son los posibles resultados y cuánto valen sus probabilidades?

Recordar que :

$$Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\theta \tag{1}$$

b) Si se usa también que:

$$Y_1^{\pm 1}(\theta,\varphi) = \mp 1\,\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\; e^{\pm\, i\,\varphi}$$

¿es posible predecir directamente las probabilidades de todos los posibles resultados de medir $\vec{L}^2$ y L_z en el sistema de la función de onda $\psi(x,y,z)$?

7. Halle la matriz que representa a S_x para una partícula de spin 3/2, usando la base de estados propios de S_z. Determine los valores propios de S_x.

8. a) Usando que la rotación geométrica infinitesimal de un vector $\vec{v}$ del espacio $\mathbb{R}^3$ con eje $\hat{u}$ y ángulo $d\alpha$ se escribe como $\mathcal{R}_{\hat{u}}(d\alpha)(\vec{v}) = \vec{v} + d\alpha\ \hat{u}\times\vec{v}$, muestre que a primer orden en $d\alpha$ y $d\beta$ se cumple la ecuación vista en clase:

$$\mathcal{R}_{\hat{y}}(-d\alpha)\mathcal{R}_{\hat{x}}(d\beta)\mathcal{R}_{\hat{y}}(d\alpha)\mathcal{R}_{\hat{x}}(-d\beta) = \mathcal{R}_{\hat{z}}(d\beta\ d\alpha) \tag{2}$$

que muestra la diferencia entre aplicar dos rotaciones en orden distinto: $\mathcal{R}_{\hat{x}}(d\beta)\mathcal{R}_{\hat{y}}(d\alpha)(\vec{v})$ y $\mathcal{R}_{\hat{y}}(d\alpha)\mathcal{R}_{\hat{x}}(d\beta)(\vec{v})$ (no conmutatividad de las rotaciones).

b) Muestre que esta fórmula, al sustituirse las rotaciones geométricas por los operadores de rotación cuánticos $R_{\hat{u}}(d\alpha) = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar}d\alpha\vec{J}.\hat{u}$ nos da la relación de conmutación de las componentes del momento angular $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$

9. El hamiltoniano de un oscilador armónico en tres dimensiones, cuya energía potencial depende de dos coordenadas (x e y) es:

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(X^2+Y^2\right) = H_z + H_{xy}$$

con :

$$H_z = \frac{P_z^2}{2m}$$

$$H_{xy} = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2X^2 + \frac{1}{2m}P_y^2 + \frac{1}{2}m\omega^2Y^2 = H_x + H_y$$

El término H_{xy} es suma de dos osciladores armónicos. Si se define:

$$a_x = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}P_x$$

$$a_y = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}Y + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}P_y$$

entonces $H_{xy} = \hbar\omega\left(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1\right) = \hbar\omega\,(N_x + N_y + 1)$.

Un estado propio de H_{xy} es el producto $|\phi_{nx,ny}\rangle = |\phi_{nx}\rangle|\phi_{ny}\rangle$. A partir del estado base $|\phi_{00}\rangle$ se obtiene como:

$$|\phi_{nx,ny}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_x!n_y!}}(a_x^\dagger)^{n_x}(a_y^\dagger)^{n_y}|\phi_{00}\rangle$$

a) Halle los niveles de energía E_n de este oscilador en dos dimensiones, determinando los valores de n. Muestre que son degenerados.

b) Muestre que la componente z del momento angular $L_z = XP_y - YP_x$ se escribe

$$L_z = i\hbar\left(a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y\right)$$

Demuestre que $[H_{xy}, L_z] = 0$.

c) Se define ahora los operadores:

$$a_R = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_x - ia_y) \qquad\qquad a_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(a_x + ia_y)$$

Demuestre que en términos de éstos:

$$\begin{aligned} H_{xy} &= \hbar\omega\left(a_R^\dagger a_R + a_L^\dagger a_L + 1\right) = \hbar\omega\,(N_R + N_L + 1) \\ L_z &= \hbar\left(a_R a_R^\dagger - a_L^\dagger a_L\right) = \hbar\,(N_R - N_L) \end{aligned}$$

y que los estados construidos como:

$$|\chi_{nR,nL}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_R!n_L!}}(a_R^\dagger)^{n_R}(a_L^\dagger)^{n_L}|\phi_{00}\rangle$$

son estados propios de H_{xy} con valores propios $n\hbar\omega$ $(n = n_R + n_L + 1)$ y estados propios de L_z con valores propios $m\hbar$ $(m = n_R - n_L)$. Interprete estos resultados.