Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2023

Práctico 6: Producto interno complejo.

1. En este ejercicio queremos estudiar $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k$ donde $T : V \to V$ es una transformación ortogonal de un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita.

   Resulta para esto más fácil extender T a un espacio complejo. El resultado obtenido es una versión de dimensión finita del llamado "Teorema Ergódico de Von Neumann" demostrado en la década de 1930.

   a) Demostrar que si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tiene módulo 1 entonces $\frac{1}{n}(1+\lambda+\cdots+\lambda^{n-1}) \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

   b) Si U es una transformación lineal unitaria de un espacio vectorial complejo con producto interno demostrar que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U^k = P$ donde P es la proyección ortogonal sobre el subespacio de vectores propios de valor propio 1.

   c) Deducir el resultado análogo para una transformación ortogonal de un espacio con producto interno real.

2. Supongamos que A es una matriz real ortogonal $d \times d$. El objetivo de este ejercicio es mostrar que $\mathbb{R}^d$ se escribe como suma de subespacios A-invariantes de dimensión 1 y 2 que son ortogonales entre sí (i.e. cada subespacio es ortogonal a la suma de todos los demás).

   a) Mostrar que los únicos valores propios reales de A posibles son ± 1, y que si los subespacios propios asociados son S_1, S_{-1} entonces son ortogonales entre sí, y el complemento ortogonal de la suma $S_1 \oplus S_{-1}$ es A-invariante.

   b) Suponiendo que $v \in \mathbb{C}^d$ es vector propio de la multiplicación a izquierda por A con valor propios complejo, mostrar que el valor propio asociado es $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ para algún $t \in \mathbb{R}$.

   c) Tomando v y e^{it} como en la parte anterior y escribiendo $v = v_1 + iv_2$ donde $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d$, mostrar que el subespacio de $\mathbb{R}^d$ generado por v_1 y v_2 es A-invariante, tiene dimensión 2, y encontrar la matriz asociada a la transformación multiplicar a izquierda por A restricta a este subespacio en la base v_1, v_2.

   d) Con $v = v_1 + iv_2$ vector propio de valor propio e^{it} como en la parte anterior, mostrar que $w = v_2 - iv_1$ también es vector propio en $\mathbb{C}^d$ y calcular su valor propio. Observar que v y w dan el mismo subespacio A-invariante de $\mathbb{R}^d$ al razonar como en la parte anterior.

   e) Demostrar, como se buscaba, que $\mathbb{R}^d$ es suma directa de subespacios de dimensión 1 y 2 que son ortogonales y A-invariantes.

   f) Demostrar que la cantidad de subespacios de dimensión 2 en la descomposición anterior es igual a $\frac{1}{2}$-veces la cantidad de vectores propios con valor propio no real en una base ortonormal de $\mathbb{C}^d$ en la que A se diagonaliza.

3. En este ejercicio se trabaja sobre la llamada transformada de Fourier discreta, que es una herramienta muy usada en tratamiento de señales.

   Se considera para cierto número natural $n \geq 2$ los enteros módulo n, $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ (equivalentemente los números $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ donde la suma y producto se reemplazan por su resto al dividir entre n).

   Nos interesa el espacio vectorial V cuyos elementos son funciones $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$.

a) Dadas $f, g \in V$ se considera la convolución $(f*g)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}_n} f(y)g(x-y)$. Mostrar que $f*g = g*f$ y que $f*(g*h) = (f*g)*h$.

b) Calcular para cualquier $f \in V$ y $a \in \mathbb{Z}_n$ la convolución $f * \delta_a$ donde $\delta_a \in V$ cumple $\delta_a(x) = 0$ si $x \neq a$ y $\delta_a(a) = 1$.

c) La transformada de Fourier discreta $\mathcal{F}_n : V \to V$ se define de manera que $\mathcal{F}_n(\delta_a)(x) = e^{\frac{2\pi i a x}{n}} = e_n(x)$ para todo a (usamos esta ecuación como definición de $e_n \in V$ también). Mostrar que $\mathcal{F}_n$ es invertible.

d) Calcular la matriz asociada a $\mathcal{F}_n$ de la base $\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}$ en sí misma (puede servir fijar $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ y expresar el resultado en potencias de ω, para aliviar notación).

e) Mostrar que $\mathcal{F}_n(f*g)(x) = \mathcal{F}_n f(x) \mathcal{F}_n g(x)$.

f) Consideramos en V el product interno $\langle f, g\rangle = \sum_{x \in \mathbb{Z}_n} f(x)\overline{g(x)}$. Mostrar que $\|\mathcal{F}_n f\|^2 = \frac{1}{n}\|f\|^2$ para toda $f \in V$.

g) Deducir que $n^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F}_n$ es una transformación unitaria.

h) Definiendo $g(x) = \frac{1}{3}(\delta_{n-1} + \delta_0 + \delta_1)$ suponiendo que $n \geq 3$), mostrar que g^{*n} (n-ésima convolución de g consigo misma) tiende a la función constante 1 cuando $n \to +\infty$.

i) Suponiendo que $\sum_{x \in \mathbb{Z}_n} f(x) = 0$ estimar la norma de $f * g^{*n}$ donde g es como en la parte anterior. ¿Qué pasa cuando $n \to +\infty$?

4. Consideramos el espacio vectorial V_n de polinomios trigonométricos con coeficientes complejos de grado menor o igual a n definidas en el intervalo $[0, 2\pi]$. Es decir, un elemento de V_n es una función $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ de la forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx),$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$.

Consideramos en V el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g}(x)dx,$$

donde la integral de una función a valores complejos se define integrando la parte real e imaginaria por separado.

a) Calcular la dimensión de V_n como espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y sobre $\mathbb{R}$.

b) Mostrar que se puede construir una base usando las funciones $e_k(x) = e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$.

c) Construir una base ortormal de explícita de V_n.

Consideramos $T : V_n \to V_n$ definida por $(Tf)(x) = f''(x)$ (i.e. donde f' es la derivada de la parte real de f más i veces la derivada de la parte imaginaria). Mostrar que T es autoadjunta

a) Mostrar que T es autoadjunta.

b) Calcular los valores propios de T.

c) Exhibir una base ortornomal explícita de valores propios de T.

d) Verificar que si $Tf = \lambda f$ entonces definiendo $u(t,x) = e^{-\lambda t} f(x)$ se obtiene una solución explícita a la ecuación del calor $\partial_t u = \partial_x^2 u$. Usando esta observación demostrar que para toda $f \in V_n$ existe una solución $u(t,x)$ a la ecuación del calor con $u(0,x) = f(x)$. La idea de que una función "general" podría aproximarse por $f \in V_n$ con n grande y por lo tanto podría servir como condición inicial para la ecuación del calor fue propuesta por Fourier a principios del siglo XIX y desde entonces este tipo de aproximaciones (con n creciente) se conocen como "series de Fourier".