Práctico 3

October 30, 2023

Dado un proceso de Wiener $\{W(t) : t \geq 0\}$, notaremos por W_t a $W(t)$.

Contents

1 Ejercicio 1

Ex. 7.1 en Basic Stochastic Processes del Breźniak (la solución está en la página 209).

2 Ejercicio 2

1. Demostrar que los procesos $\{W(t)\}_{0\leq t\leq T}$ y $\{W^2(t)\}_{0\leq t\leq T}$ pertenecen a la clase de integrandos $H_2[0, T]$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq A|x|^n + B$ para algún natural n. Demostrar que $\{f(W(t))\}_{0\leq t\leq T}$ está en $H_2[0, T]$.

Solución

En cada caso hay que verificar que se cumple

$$\int_0^T \mathbb{E}(f^2(s))ds < \infty \tag{1}$$

- Observar que

  $$\int_0^T \mathbb{E}(W^2(s))ds = \int_0^T sds = \frac{T^2}{2} < \infty, \tag{2}$$

  por definición de $\{W(t)\}_{0\leq t\leq T}$, y que

  $$\int_0^T \mathbb{E}(W^4(s))ds = \int_0^T 3s^2 ds = T^3 < \infty, \tag{3}$$

  pues el cuarto momento de una Gaussiana $N(0,\sigma^2)$ es $3\sigma^4$.

- $$\int_0^T \mathbb{E}(f^2(W(s)))ds \leq \int_0^T \mathbb{E}((A|W(s)|^n + B)^2)ds < \infty, \tag{4}$$

  debido a que

  $$\mathbb{E}((A|W(s)|^n + B)^2) = \mathbb{E}(A^2|W(s)|^{2n} + AB|W(s)|^n + B^2), \tag{5}$$

  y cada momento es finito.

3 Ejercicio 3

Ex. 7.2 en Basic Stochastic Processes del Breźniak (la solución está en la página 209).

Solución

Haremos la solución usando la fórmula de polarización,

$$\begin{aligned} E(I(f)I(g)) &= \frac{1}{4}\left(\mathbb{E}(I(f)+I(g))^2 - \mathbb{E}(I(f)-I(g))^2\right) && (6)\\ &= \frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\int_0^T (f(s)+g(s))^2 - (f(s)-g(s))^2 ds\right) && (7)\\ &= \mathbb{E}\left(\int_0^T f(s)g(s)ds\right) && (8) \end{aligned}$$

4 Ejercicio 4

1. Calcular la distribución de $\int_0^t f(s)dW(s)$.
2. Calcular la distribución de $\int_0^t sdW(s)$ condicional a $W(t) = z$.

Solución

1. Sea $Z(t) = \int_0^t f(s)dW(s)$. Consideremos $n > 1$ un entero y $\{t_i\}_i$ una partición tal que $t_{i+1} - t_i = t/n$. Entonces, usando la definición de integral estocástica (y la convergencia en probabilidad),

$$
\begin{aligned}
P(Z(t) \le a) &= P\left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \le a\right) && (9)\\
&= \lim_{n\to+\infty} P\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \le a\right). && (10)
\end{aligned}
$$

Ahora bien, $\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ es una distribución normal por ser suma de distribuciones normales,

$$
\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \sim N\left(0, \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_i))^2 (t_{i+1} - t_i)\right). \tag{11}
$$

Entonces,

$$
P(Z(t) \le a) = \lim_{n\to+\infty} \Phi\left(\frac{a}{\sum_{i=0}^{n-1} (f(t_i))^2 (t_{i+1} - t_i)}\right) = \Phi\left(\frac{a}{\int_0^t f^2(s)ds}\right). \tag{12}
$$

Finalmente,

$$
Z(t) \sim N(0, \int_0^t f^2(s)ds) \tag{13}
$$

2. De la parte anterior,

$$
Z(t) \sim N(0, \int_0^t f^2(s)ds) = N(0, t^3/3). \tag{14}
$$

Observar que $aZ(t) + bW(t)$ es una distribución normal para cualquier par de $a, b \in \mathbb{R}$. Por tanto, dado $W(t) = z$, $Z(t)$ tendrá una distribución normal con

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z(t)|W(t) = z) &= \rho\sqrt{t^3/3}\frac{z}{\sqrt{t}}, && (15)\\
\mathbf{var}(Z(t)|W(t) = z) &= (1-\rho^2)t^3/3, && (16)
\end{aligned}
$$

de la fórmula de variables aleatorias normales conjuntas, donde $\rho = \frac{\mathbf{cov}(Z(t),W(t))}{\sqrt{t^3/3}\sqrt{t}}$.

Calculemos la covarianza (recordar que ambas v.a. tienen esperanza nula) para $Z(t) = \int_0^t f(s)dW(s)$,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{cov}(Z(t), W(t)) &= \mathbb{E}\left(Z(t)W(t)\right) && (17)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})W(t)\right) && (18)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\mathbb{E}\left((W_{t_{i+1}} - W_{t_i})W(t)\right) && (19)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)(\min(t_{i+1}, t) - \min(t_i, t)) && (20)\\
&= \int_0^t f(s)ds. && (21)
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$\rho = \frac{t^2/2}{\sqrt{t^3/3}\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{3}}{2}t, \tag{22}$$

y la distribución condicional resulta

$$Z(t)|W(t) = z \sim N\left(\frac{z}{2}, \frac{1}{12}(4-3t^2)t^3\right) \tag{23}$$

5 Ejercicio 5

Ex. 7.9 en Basic Stochastic Processes del Breźniak (la solución está en la página 214).

6 Ejercicio 6

Ex. 7.8 en Basic Stochastic Processes del Breźniak (la solución está en la página 213).

7 Ejercicio 7

Ex. 7.9 en Basic Stochastic Processes del Breźniak (la solución está en la página 215).

8 Ejercicio 8

1. Use Itô's formula to prove that

$$\int_0^T e^{W(t)-t/2} dW(t) = e^{W(T)-T/2} - 1. \tag{24}$$

2. Use Euler's scheme to simulate the integral.
3. Plot and histogram and compute expectation and variance of the random variable

$$J = e^{W(1)-1/2} - 1 \tag{25}$$

4. Plot both histograms.

Solución

1. Usamos la fórmula de Itô en su versión simplificada,

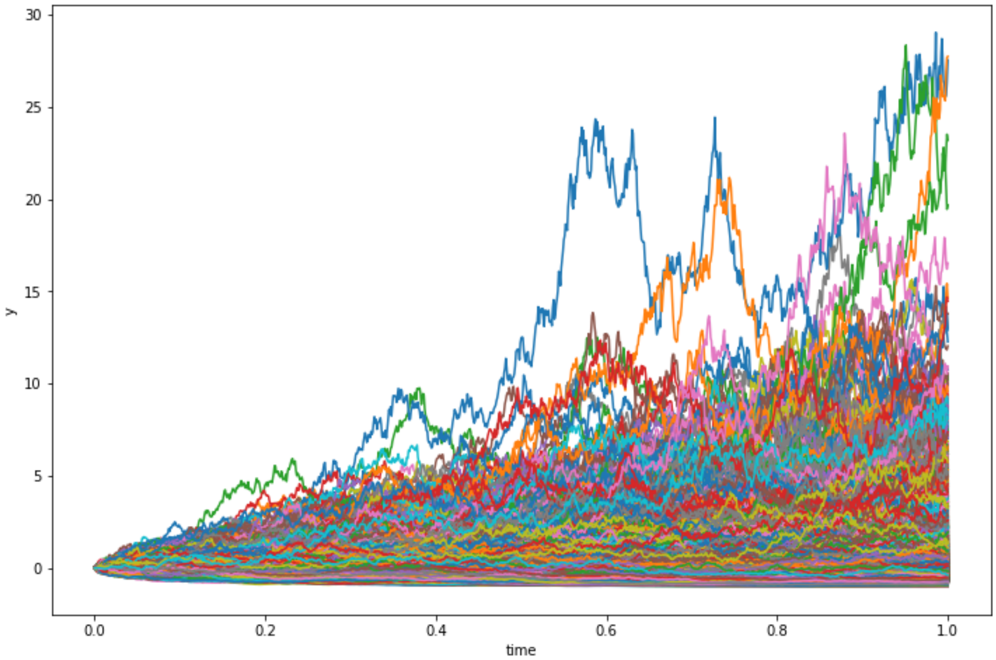
$$F(T, W(T)) - F(0, W(0)) = \int_0^T \left(\partial_t + \frac{1}{2}\partial_{xx}\right) F(t, W(t))dt + \int_0^T \partial_x F(t, W(t))dW(t) \tag{26}$$

Para este ejercicio, tomamos $F(t,x) = e^{x-t/2}$. Observar que

$$\left(\partial_t + \frac{1}{2}\partial_{xx}\right) F = 0, \tag{27}$$

por lo que directamente,

$$e^{W(T)-T/2} - 1 = \int_0^T e^{W(t)-t/2} dW(t). \tag{28}$$



2. El gráfico que mostramos a continuación tiene $N_{sim} = 10^4$,

3.

$$\begin{aligned} \mu_I &= 0.01535 && (29) \\ \mathbf{var}_I &= 1.84186 && (30) \\ \mu_J &= -0.00911 && (31) \\ \mathbf{var}_J &= 1.70261 && (32) \\ & && (33) \end{aligned}$$

4.

9 Ejercicio 9

Considerar la integral

$$I = \int_0^1 e^t dw(t). \tag{34}$$

1. Hallar la esperanza y la varianza de I.
2. Hallar la esperanza y la varianza de I numéricamente.
3. Graficar en el mismo gráfico los resultados de la simulación y teórico.

Solución

1. Por el ejercicio 4)a), tenemos que

$$I \sim N(0, \frac{1}{2}(e^2 - 1)) \tag{35}$$

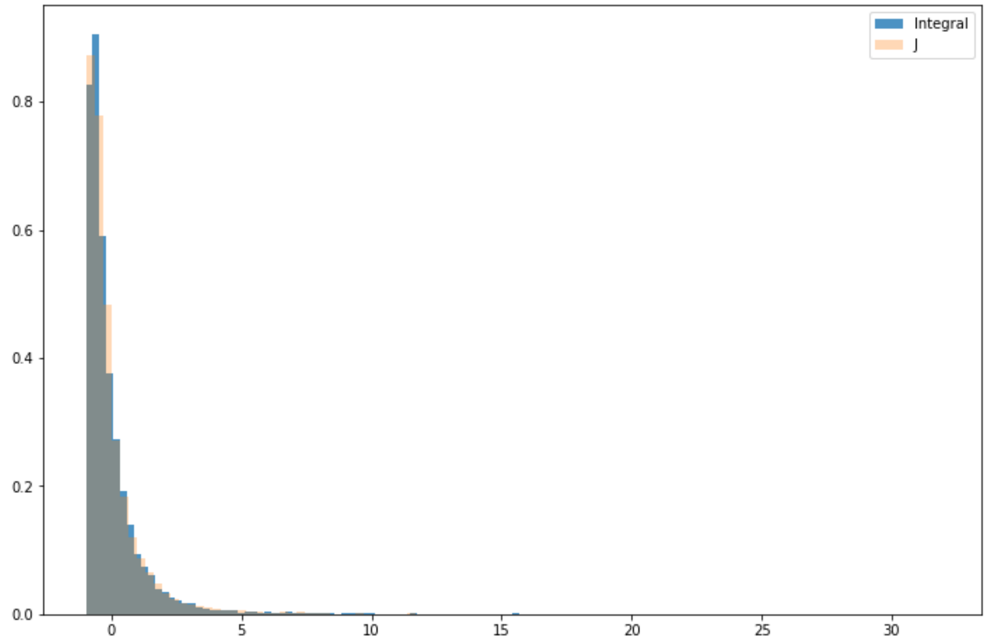


Figure 1: Ej. 8 parte c

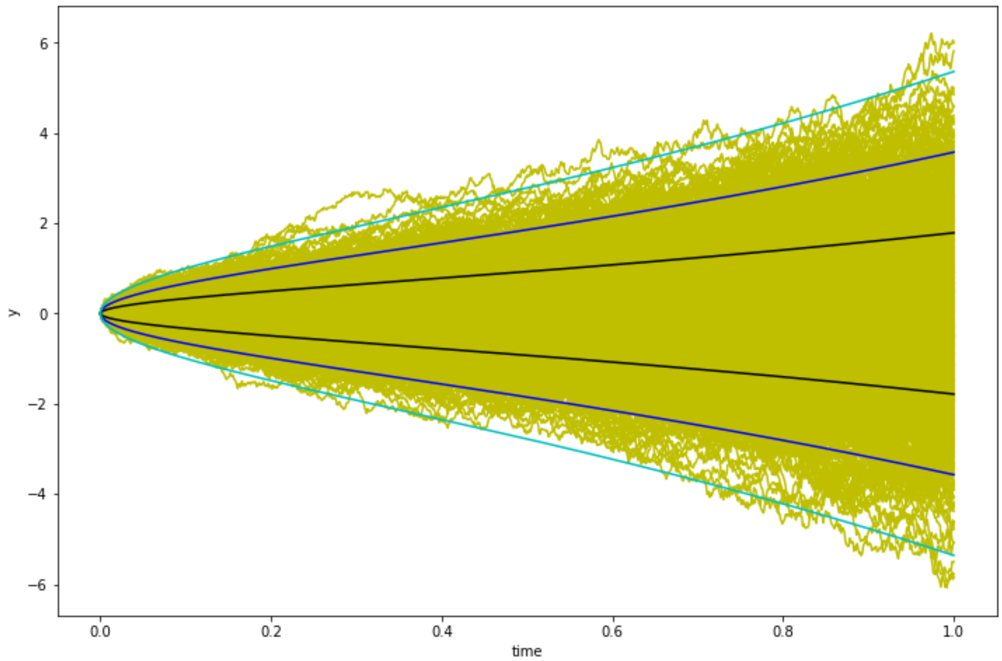


Figure 2: Ej. 9 parte b

2. En la siguiente figura mostramos los recorridos obtenidos en la simulación, y como referencia las curvas $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$ y $\pm 3\sigma$.

3.

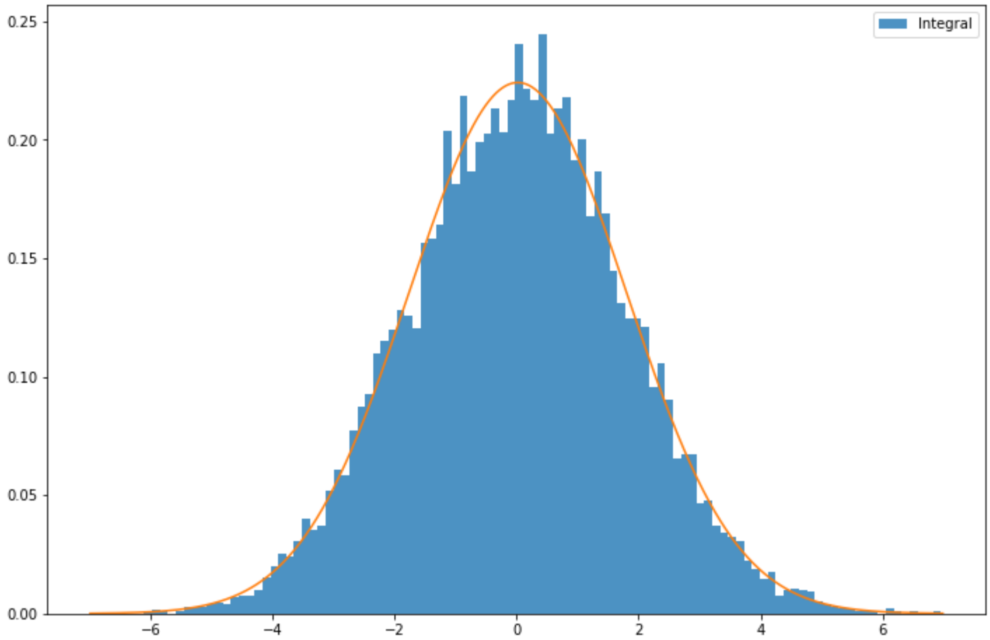


Figure 3: Ej. 9 parte c

10 Ejercicio 10

Solución

1. A partir de la identidad que nos dan,

$$\int_0^1 \mathbb{E}(e^{2W(s)})ds = \int_0^1 e^{2s}ds, \tag{36}$$

ya que $\sigma^2 = s$ para la v.a. $W(s)$ y la propiedad de escala $cN(0,\sigma^2) = N(0,c^2\sigma^2)$.

2. Para $N_{sim} = 10^4$,

$$\mu_{exp} = 3.46075 \tag{37}$$
$$\mu_{th} = 3.19452 \tag{38}$$

11 Ejercicio 11

Solución

Para $N_{sim} = 10^4$, mostramos los resultados de la simulación.

$$\mu_{sim} = -0.00119 \tag{39}$$
$$\mu_{th} = -0.00149 \tag{40}$$
$$\mathbf{var}_{sim} = 0.49862 \tag{41}$$
$$\mathbf{var}_{th} = 0.49922 \tag{42}$$

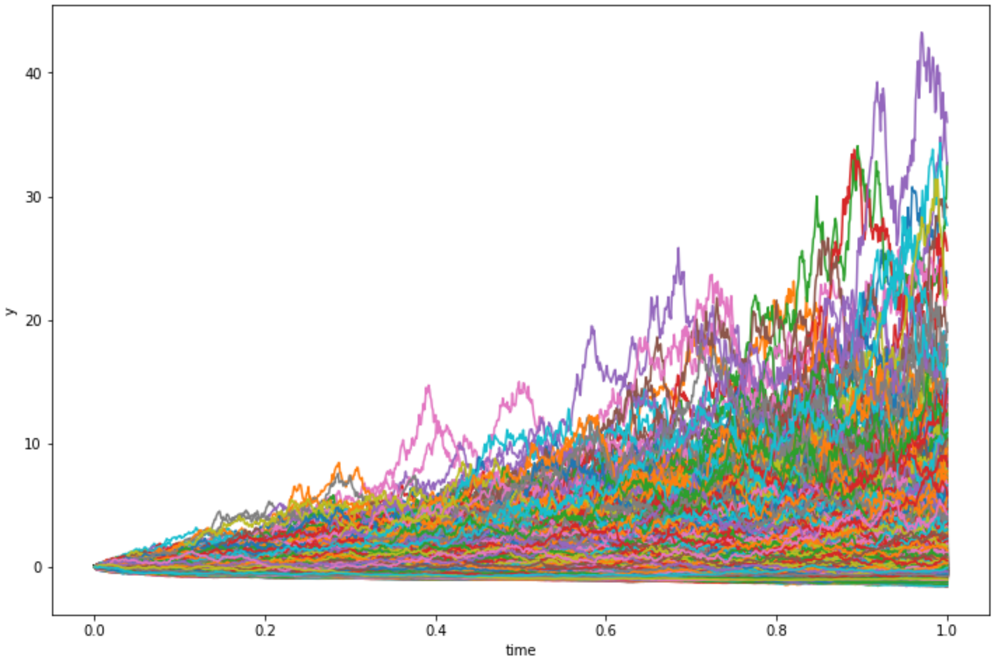


Figure 4: Ej. 10

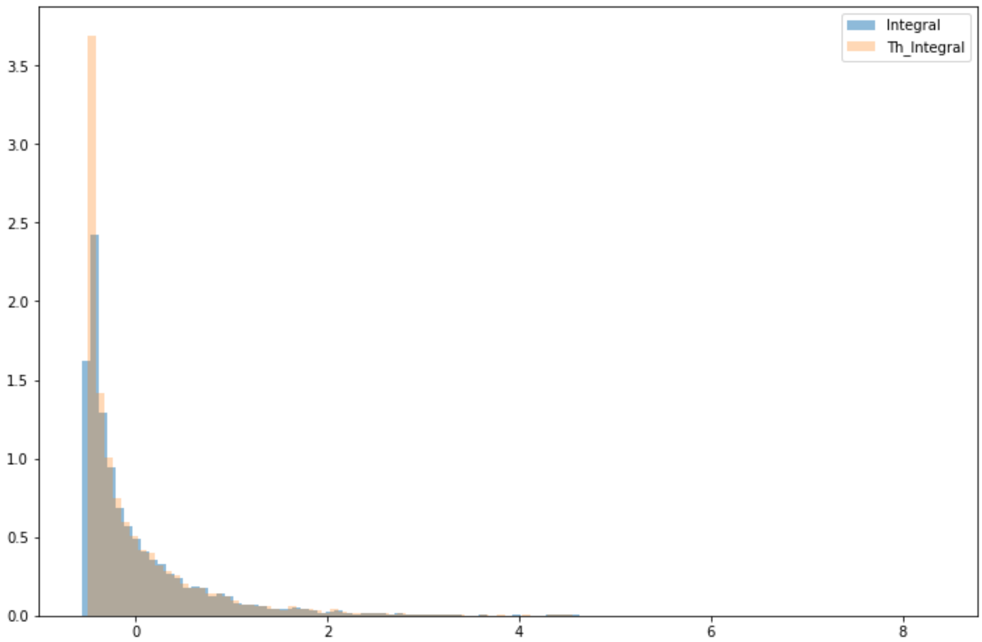


Figure 5: Ej. 11