Práctico 7

En los ejercicios siguientes L es un álgebra de Lie arbitraria, a menos que se especifique lo contrario. Todos los L-módulos y espacios son de dimensión finita. El cuerpo $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado.

1. Sea $L = \mathfrak{b}_n(\Bbbk)$ y $V = \Bbbk^n$. Consideramos a V como L-módulo con la representación natural. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de V y $W_i = \Bbbk\{e_1, \dots, e_i\}$, $i = 1 \dots, n$.
   a) Probar que cada W_i es un L-submódulo de V.
   b) Probar que si $0 \neq U$ es un L-submódulo de V, entonces existe algún $i \in \{1 \dots, n\}$ tal que $U = W_i$.

2. *a*) Probar que si V es un L-módulo de dimensión 1, entonces existe $\lambda \in L^*$ tal que $x \cdot v = \lambda(x)v$, para todo $x \in L$ y $v \in V$. Probar que $\lambda([L, L]) = 0$.
   b) Probar que si $\lambda \in L^*$ verifica $\lambda([L, L]) = 0$, entonces $\Bbbk$ tiene estructura de L-módulo definiendo $x \cdot v = \lambda(x)v$, para todo $x \in L$ y $v \in \Bbbk$.
   c) Deducir que hay una correspondencia uno a uno entre las clases de isomorfismo de las representaciones unidimensionales de L y los elementos de $(L/[L, L])^*$.

   Nota. Lo anterior implica que si $L = [L, L]$, entonces la única representación unidimensional de L es la trivial, mientras que si $L \neq [L, L]$ y $\Bbbk$ es infinito, entonces L tiene infinitas representaciones unidimensionales que no son isomorfas entre sí.

   d) Determinar las representaciones unidimensionales de $L = \mathfrak{b}_n(\Bbbk)$.

3. *a*) Sean V y W dos espacios vectoriales. Probar:
   1) Para cada $\alpha \in V^*$, $\gamma \in W^*$ existe $\eta_{\alpha,\gamma} \in (V \otimes W)^*$ tal que $\eta_{\alpha,\gamma}(v \otimes w) = \alpha(v)\gamma(w)$, para todo $v \in V$, $w \in W$.
   2) Existe un mapa lineal $\Phi : V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$ que verifica $\Phi(\alpha \otimes \gamma)(v \otimes w) = \alpha(v)\gamma(w)$, para todo $\alpha \in V^*$, $\gamma \in W^*$, $v \in V$, $w \in W$.
   3) El mapa $\Phi : V^* \otimes W^* \to (V \otimes W)^*$ es un isomorfismo. *Sugerencia:* alcanza con probar que Φ es inyectivo; para esto, notar que si $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ es una base de W^*, entonces existe $\{w_1, \dots, w_n\}$ base de W tal que $\eta_i(w_j) = \delta_{ij}$, para todo i, j.

   Luego pensamos $V^* \otimes W^* = (V \otimes W)^*$, mediante $\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \otimes \gamma_i\right)(v \otimes w) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(v)\, \gamma_i(w)$. Sea $\mathrm{Bil}(V, W)$ el espacio de formas bilineales. Notar que la propiedad universal del producto tensorial junto con el isomorfismo anterior implican $\mathrm{Bil}(V, W) \simeq V^* \otimes W^*$.
   Luego identificando $\mathrm{Bil}(V, W) = V^* \otimes W^*$, si $\beta \in \mathrm{Bil}(V, W)$, entonces existen $\alpha_i \in V^*$ y $\gamma_i \in W^*$, $i = 1, \dots k$, tales que $\beta = \sum_{i=1}^k \alpha_i \otimes \gamma_i$ (es decir, $\beta(v, w) = \sum_{i=1}^k \alpha_i(v)\, \gamma_i(w)$, $\forall v, w$).

   b) Supongamos ahora que V y W son L-módulos.
   1) Mediante $\mathrm{Bil}(V, W) \simeq V^* \otimes W^*$, inducir una estructura de L-módulo en $\mathrm{Bil}(V, W)$.
   2) Dada $\beta \in \mathrm{Bil}(V, W)$, probar que β es L-invariante[1] si y solo si $\beta(x \cdot v, w) + \beta(v, x \cdot w) = 0$, para todo $x \in L,\ v \in V,\ w \in W$. Notar que la forma de Killing $\kappa : L \times L \to \Bbbk$ es L-invariante.

4. Sea L un álgebra simple y $\beta_1, \beta_2 : L \times L \to \Bbbk$ dos formas bilineales simétricas L-invariantes. Probar que si β_1 y β_2 son no degeneradas, entonces existe $0 \neq a \in \Bbbk$ tal que $\beta_1 = a\beta_2$. *Sugerencia:* aplicar el lema de Schur.

[1] Al decir que β es L-invariante nos referimos a que está en el espacio de invariantes del L-módulo $\mathrm{Bil}(V, W)$.

5. Sea L un álgebra que verifica que todo L-módulo de dimensión finita es completamente reducible.

   a) Sea $K \subset L$ un ideal abeliano.

      1) Probar que existe un ideal $H \subset L$ tal que $L = K \oplus H$.
      2) Probar que si $\rho : K \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación de dimensión finita, entonces ρ es completamente reducible. *Sugerencia*: inducir una representación de L en V.
      3) Si $K \neq 0$, entonces obtenemos una contradicción con la parte $5a2$ (¿por qué?). Luego $K = 0$.

   b) Concluir que L es semisimple (este es el recíproco del teorema de Weyl).

6. El objetivo de este ejercicio es ver que un álgebra L es reductiva si y solo si L es completamente reducible con la representación adjunta.

   a) Probar que si L es un álgebra reductiva, entonces L es completamente reducible con la representación adjunta. *Sugerencia*: ver que $\mathrm{ad}(L)$ es un álgebra semisimple.

   b) Supongamos que L es un álgebra que es completamente reducible con la representación adjunta.

      1) Probar $L = Z(L) \oplus [L, L]$. Se sugiere el siguiente camino.
         - Probar que existe $K \lhd L$ tal que $L = Z(L) \oplus K$. Ver que esto implica $[L, L] = [K, K]$.
         - Escribir $K = \bigoplus_{i=1}^{n} K_i$, siendo cada $K_i \subset K$ un L-submódulo irreducible (¿por qué podemos hacerlo?). Probar $[K_i, K_i] = K_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Concluir $[K, K] = K$.
      2) Probar que $[L, L]$ es semisimple. *Sugerencia*: sabemos $[L, L] = \bigoplus_{i=1}^{n} K_i$, siendo cada K_i un L-submódulo irreducible. Probar que no puede ser $\dim K_i = 1$, para ningún i.
      3) Probar que L es reductiva. *Sugerencia*: proyectar $\mathrm{rad}(L)$ en $L/Z(L)$.

7. Sea L un álgebra reductiva y $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación de dimensión finita tal que $\rho_x : V \to V$ es diagonalizable para todo $x \in Z(L)$. El objetivo es probar que ρ es completamente reducible.

   a) Restringiendo ρ a $Z(L)$, consideramos V como $Z(L)$-módulo.
   Sea $\{e_1, \ldots, e_r\}$ una base de $Z(L)$. Probar que existe $\{v_1, \ldots, v_s\}$ base de V y escalares $\alpha_{ij} \in \Bbbk$ tales que $e_i \cdot v_j = \alpha_{ij} v_j$, para todo i, j.

   b) Probar que existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in Z(L)^*$, tales que $x \cdot v_j = \lambda_j(x) v_j$, para todo $x \in Z(L)$.

   c) Notar que podemos suponer que existe $t \leq s$ tal que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_t\}$, con $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ distintos entre sí. Probar $V = \bigoplus_{i=1}^{t} V_{\lambda_i}^{Z(L)}$, siendo $V_{\lambda_i}^{Z(L)} = \{v \in V : \ x \cdot v = \lambda_i(x) v, \ \forall x \in Z(L)\}$.

   d) Probar que cada $V_{\lambda_i}^{Z(L)}$ es un L-submódulo de V.

   e) Recordando $L = Z(L) \oplus [L, L]$, ver que cada $V_{\lambda_i}^{Z(L)}$ se descompone como suma directa de $[L, L]$-submódulos irreducibles.

   f) Probar que si $W \subset V_{\lambda_i}^{Z(L)}$ es un $[L, L]$-submódulo irreducible, entonces W es un L-submódulo irreducible.

   g) Concluir que $\rho : L \to \mathfrak{gl}(V)$ es completamente reducible.

8. Sea V un L-módulo de dimensión finita.

   a) Probar que si U es un L-submódulo propio de V, entonces $U^0 = \{\alpha \in V^* : \ \alpha|_U = 0\}$ es un L-submódulo propio de V^*.

   b) Probar que $V \simeq V^{**}$ como L-módulos.

   c) Probar que V es irreducible si y solo si V^* es irreducible.

9. *a*) Sean $V_1, \ldots, V_n$ L-módulos. Para cada i, sean $\pi_i : V_1 \times \cdots \times V_n \to V_i$ y $\iota_i : V_i \to V_1 \times \cdots \times V_n$ la proyección e inclusión usuales. Se definen

$$\Phi : (V_1 \times \cdots \times V_n)^* \to V_1^* \times \cdots \times V_n^* \quad \text{y} \quad \Psi : V_1^* \times \cdots \times V_n^* \to (V_1 \times \cdots \times V_n)^*$$

mediante $\Phi(\alpha) = \big(\alpha \circ \iota_1, \ldots, \alpha \circ \iota_n\big)$ y $\Psi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \circ \pi_i$. Probar que Φ y Ψ son morfismos de L-módulos y que son inversos uno del otro.
Luego $(V_1 \times \cdots \times V_n)^* \simeq V_1^* \times \cdots \times V_n^*$ como L-módulos.

b) Deducir que si V es un L-módulo y $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$, siendo $U_1, \ldots, U_n$ L-submódulos de V, entonces $V^* \simeq U_1^* \oplus \cdots \oplus U_n^*$ como L-módulos.