Repartido 6. Átomo de Hidrógeno y potenciales centrales.

1. a) Calcule $\langle r\rangle$ y $\langle r^2\rangle$ para un electrón en el estado base del hidrógeno. Exprese el resultado en términos del radio de Bohr.

b) Halle $\langle x\rangle$ y $\langle x^2\rangle$ para un electrón en el estado base del hidrógeno. (Esta parte no requiere integración, note que: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$).

c) Halle $\langle x^2\rangle$ para el estado $n = 2$, $l = 1$, $m = 1$. Puede usar que: $x = r \operatorname{sen}\theta \cos\theta$.

2. Se quiere averiguar la probabilidad de que un electrón en el estado base del hidrógeno sea encontrado *en el interior del núcleo*. Se supone que el núcleo es esférico, de radio b.

a) Calcule la respuesta exacta, asumiendo que la función de onda es correcta hasta $r = 0$.

b) Expanda el resultado de a) en serie de potencias del número $\epsilon = 2b/a$ y muestre que el término de menor orden es cúbico: $P \simeq (4/3)(b/a)^3$.

c) Calcule ahora la probabilidad suponiendo que $\psi(r)$ es constante dentro del pequeño volumen del núcleo: $P \simeq (4/3)\pi b^3|\psi(0)|^2$ y verifique que se obtiene lo mismo que en b)

d) Estime P usando $b \simeq 10^{-15}m$ y $a \simeq 0{,}5 \times 10^{-10}m$.

3. En $t = 0$ la función de onda de un átomo de hidrógeno es:

$$\Psi(\vec{r}, 0) = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(2\Psi_{100} + \Psi_{210} + \sqrt{2}\Psi_{211} + \sqrt{3}\Psi_{21-1}\right)$$

donde Ψ_{nlm} son las funciones de onda de base.

a) Calcule el valor esperado de la energía del sistema.

b) Calcule $\Psi(\vec{r}, t)$.

c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar al sistema con $l = 1$ y $m = 1$ en el tiempo t?

d) Suponga que en una medida se encuentra $L^2 = 2\hbar^2$ y $L_x = \hbar$. Escriba la función de onda inmediatamente después de la medida, en términos de las funciones Ψ_{nlm}.

4. Un electrón en el campo Coulombiano de un protón, está en un estado dado por la siguiente función de onda:

$$\Psi(\vec{r}) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/2} e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}}.$$

a) Hallar la probabilidad de que el electrón sea encontrado en el estado fundamental del átomo de hidrógeno al medir la energía.

b) Hallar la probabilidad de que el electrón sea encontrado en el primer estado exitado al medir la energía.

5. El electrón de un átomo de hidrógeno ocupa el estado (ahora con spin!):

$$|\psi\rangle = R_{21}\left(\sqrt{1/3}\; Y_1^0 \otimes |+\rangle_z + \sqrt{2/3}\; Y_1^1 \otimes |-\rangle_z\right)$$

a) Si se mide L^2, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

b) Repita el cálculo de a) para L_z.

c) Repita el cálculo de a) para S^2.

d) Repita el cálculo de a) para S_z.

6. Considere un átomo hidrogenoide (un electrón vinculado a un núcleo con Z protones).

a) Calcule las energías de Bohr $E_n(Z)$, el radio de Bohr $a_\infty(Z)$ y la constante de Rydberg $\mathcal{R}(Z)$.

b)¿En qué zona del espectro electromagnetico estaría la Serie de Lyman para $Z = 2$ y $Z = 3$?

7. Considere una partícula de masa m sin spin en un pozo de potencial esférico finito de radio a (partícula confinada en una esfera no rígida):

$$\begin{aligned} V(r,\theta,\varphi) &= -V_0 \quad (r < a) \qquad (1)\\ V(r,\theta,\varphi) &= 0 \quad (r > a) \qquad (2) \end{aligned}$$

Encuentre la función de onda para el estado fundamental, resolviendo la ecuación radial para $l = 0$ ¿Cuál es el valor mínimo de V_0 para que existan los estados ligados?

8. Una partícula de masa m está confinada en un pozo de potencial infinito dado por

$$\begin{aligned} V(r,\theta,\varphi) &= 0 \quad (r < a) \qquad (3)\\ V(r,\theta,\varphi) &= \infty \quad (r > a) \qquad (4) \end{aligned}$$

a) Escriba la ecuación de Schrödinger en coordenadas esféricas y muestre que los autoestados de energía tienen la forma

$$\Psi(r,\theta,\phi) = R_l(kr)Y_{lm}(\theta,\phi)$$

donde Y_{lm} son armónicos esféricos y R_l son funciones de Bessel esféricas, siendo $k = \frac{2mE}{\hbar^2}$.

b) Imponiendo las condiciones de borde (en $r = 0$ y $r = a$) para la función de onda muestre que el espectro de energía es discreto y obtenga E_{nl} en términos de la n-esima raíz de la función de Bessel esférica de orden l.

c) Obtenga explícitamente los estados estacionarios esféricamente simétricos ($l = 0$) y las energías correspondientes E_{n0}.