Segunda prueba individual de Álgebra Lineal 2 para matemática 2023 (revancha)

En este ejercicio se considera $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_4, x_1),$$

y $\widetilde{S} : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ definida por la misma fórmula.

1. **(2 puntos)**
   - *a*) Definir los productos internos usuales en $\mathbb{R}^4$ y en $\mathbb{C}^4$.
   - *b*) Definir operador adjunto, operador autoadjunto, y operador normal.
   - *c*) Enunciar la versión libre de coordenadas del teorema espectral real y la versión libre de coordenadas del teorema espectral complejo.
2. **(2 puntos)**
   - *a*) Mostrar que S es normal pero no autoadjunto.
   - *b*) Calcular una base del subespacio E_1 de valor propio 1 para S,
   - *c*) Calcular una base del subespacio E_{-1} de valor propio -1 para S,
   - *d*) Calcular una base del complemento ortogonal $E = (E_1 \oplus E_{-1})^{\perp}$.
3. **(2 puntos)**
   - *a*) Mostrar que $\widetilde{S}$ es normal pero no autoadjunto.
   - *b*) Calcular una base ortonormal de vectores propios de $\widetilde{S}$.
   - *c*) Mostrar que si λ es un valor propio de $\widetilde{S}$ que no es real y $E_\lambda \subset \mathbb{C}^4$ es el subespacio propio correspondiente entonces $E = \{\mathrm{Re}(v) : v \in E_\lambda\}$ donde la parte real $\mathrm{Re}(v)$ de un vector $v \in \mathbb{C}^4$ se define tomando parte real en cada componente.
4. **(4 puntos)** Supongamos que $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es lineal autoadjunta y conmuta con S, es decir $TS = ST$. Demostrar que T tiene un valor propio con multiplicidad al menos 2.