Práctico 3

Dinámica en el intervalo y endomorfismos del círculo.

La fecha de entrega de este práctico será el miércoles 6 de Diciembre. Habrá que entregar 6 ejercicios. La alternativa será hacer una entrega con 10 ejercicios el día del examen.

1. Mostar que si un mapa $f : S^1 \to S^1$ cumple que tiene un levantado $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple que $F(x+1) = F(x) + n$ con $n > 2$ entonces se cumple que f tiene puntos periódicos de todos los períodos.

2. Sea $q_\mu(x) = \mu x(1-x)$. Mostrar que si $\mu > 4$ entonces q_μ tiene puntos periódicos de todos los períodos.

3. Sea $g : [0,1] \to [0,1]$ la *transformación de Gauss*, es decir, $g(0) = 0$ y $g(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ donde $[y]$ denota la parte entera de $y \in \mathbb{R}$.

   a) Estudiar los puntos fijos de g.
   b) Mostrar que $x \in [0,1]$ es racional si y solamente sí existe $m > 0$ tal que $g^m(x) = 0$.
   c) Mostrar que si $x \in [0,1]$ es periódico, entonces verifica una ecuación cuadrática con coeficientes enteros.

4. Mostrar que dado un $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ existe un mapa del intervalo que contiene solamente los puntos de período n o mayores según el orden de Sharkovsky.

5. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ el *tent map* que está definido como $f(x) = 2x$ si $x \in [0, 1/2]$ y como $f(x) = 2 - 2x$ si $x \in [1/2, 2]$. Mostrar que f es topológicamente mixing y determinar exactamente cuántos puntos periódicos de período n tiene.

6. Estudiar la familia $q_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $q_\mu(x) = \mu x(1-x)$, cuyos puntos fijos son $x = 0$ y $x = p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$. Sea Λ_μ el conjunto de puntos cuya órbita futura se queda en el intervalo $[0,1]$.

   a) Mostrar que para $\mu \in (0,1)$ el punto $x = 0$ es un fijo atractor y p_μ es repulsor. (Sugerencia: Calcular la derivada de q_μ en p_μ y en 0.) Describir la dinámica de q_μ en este caso.
   b) Estudiar la dinámica para $\mu = 1$.
   c) Describir la dinámica para $\mu \in (1,3)$.
   d) Mostrar que para $\mu \in (3,4)$ hay un punto periódico de período 2.
   e) Mostrar que para $\mu > 4$ hay puntos periódicos de todos los períodos y que el conjunto Λ_μ es un conjunto de cantor donde q_μ es conjugado al shift unilateral.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^3. Definimos su *derivada Schwarziana* como

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2.$$

a) Mostrar que $S(f \circ g) = (Sf \circ g)(g')^2 + Sg$.

b) Deducir que $S(f^n)(x) = \sum_{i=0}^{n-1} Sf(f^i(x)) \cdot ((f^i)'(x))^2$.

c) Si $Sf < 0$ entonces $S(f^n) < 0$ para todo $n \geq 1$.

8. Mostrar que un polinomio con raices reales diferentes tiene derivada Schwarziana negativa.

9. Una transformación racional (o de Möbius) es una función $\varphi : \mathbb{R}\cup\{\infty\} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ definida como $\varphi(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc > 0$.

   a) Mostrar que dados $x, y, z \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ diferentes existe una transformación racional tal que $\varphi(x) = 0$, $\varphi(y) = 1$ y $\varphi(z) = \infty$.

   b) Mostrar que las transformaciones racionales tienen derivada Schwarziana nula.

10. Sea $f_\mu = 1 - \mu x^2$.

    a) Mostrar que $x_0 = 2/3$ es fijo para f_μ con $\mu = 3/4$.

    b) Estudiar que pasa al variar μ en ambas direcciones cerca de x_0.

11. Mostrar que si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ tiene un punto periódico de período impar, entonces, el número de puntos fijos de f^n crece exponencialmente con n.

12. Consideramos $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio complejo de grado mayor o igual a 2. Definimos la *cuenca a infinito* como el conjunto

$$\Omega_\infty = \Omega_\infty(P) = \{z \in \mathbb{C} : P^n(z) \to \infty\}.$$

    a) Probar que Ω_∞ es abierto, invariante ($P^{-1}(\Omega_\infty) \subset \Omega_\infty$) y tiene complemento acotado.

    b) Se define el *conjunto de Julia* de P como $J(P) = \partial\Omega_\infty$ y el *conjunto de Fatou* de P como $F(P) = \mathbb{C} \setminus J(P)$. Calcular los conjuntos de Julia y Fatou para el polinomio $P(z) = z^n$ ($n \geq 2$).

13. Una función racional en la esfera $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es un cociente de polinomios complejos $f(z) = \frac{P(z)}{Q(Z)}$. Suponemos además que $\max\{gr(P), gr(Q)\} \geq 2$. Definimos el *conjunto de Fatou* de f, notado por $F(f)$, como el conjunto de puntos $z \in \overline{\mathbb{C}}$ para los cuales existe $\epsilon > 0$ tal que la familia de funciones $\{f^n|_{B(z,\epsilon)} : n \in \mathbb{N}\}$ es normal. Recordar que una familia de funciones es normal si toda sucesión tiene una subsucesión que converge uniformemente en compactos. El *conjunto de Julia* se define por $J(f) = \overline{\mathbb{C}} \setminus F(f)$.

    a) Probar que $F(f)$ es abierto y cumple $f^{-1}(F(f)) = F(f)$ (por lo tanto que $J(f)$ y $f^{-1}(J(f)) = J(f)$).

    b) Probar que $z \in F(f)$ si y solo si z es estable, es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $dist(z, w) < \delta$, entonces $dist(f^n(z), f^n(w)) < \epsilon$ ($dist$ es la distancia esférica). Recordar el Teorema de Montel: una familia de funciones holomorfas que es uniformemente acotada en compactos es norma.

    c) Probar que si $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ es cerrado con tres puntos o más y cumple $f^{-1}(K) \subset K$, entonces $J \subset K$. Sugerencia: Usar el siguiente resultado: Si $\mathcal{F}$ es una famlia de funciones holomorfas definidas en $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ de forma tal que $f(\Omega) \subset \Omega$ para todo $f \in \mathcal{F}$ y Ω^c tiene al menos tres puntos, entonces $\mathcal{F}$ es normal.

    d) Probar que las definiciones de $F(f)$ y $J(f)$ coinciden con las del ejercicio anterior en el caso de polinomios (si nos restringimos a $\mathbb{C}$).

e) Probar que si $z \in J(f)$, entonces

$$J = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(z)}.$$

f) Probar que $J(f)$ es perfecto.

g) Probar que el conjunto de Julia del polinomio $z \mapsto z^2 - 2$ es el intervalo $[-2, 2]$.