Repartido 8. Partículas idénticas.

1. Operadores Permutación.

Se define el operador permutación para un sistema de dos partículas, no idénticas pero con espacio de estado isomorfos (o sea, se pueden representar usando una base común):

$P_{21}|u_i u_j\rangle \equiv |u_j u_i\rangle$

Demostrar que:

a) $(P_{21})^2 = 1$

b) P_{21} es su propio inverso

c) P_{21} es Hermítico

d) P_{21} es unitario

e) sus autovalores son ± 1.

2. Supongamos dos partículas de igual masa (sin spin), que no interactúan, en una dimensión. Una partícula está en el estado $|\psi_a(x)\rangle$ y la otra en $|\psi_b(x)\rangle$. Ambos estados están normalizados, y son ortogonales.

a) Si las partículas son distinguibles y la 1 está en el estado $|\psi_a(x_1)\rangle$ y la 2 en $|\psi_b(x_2)\rangle$, el estado del sistema es el producto:

$|\Psi_D(x_1, x_2)\rangle = |\psi_a(x_1)\rangle\ |\psi_b(x_2)\rangle.$

Calcule una expresión para el valor esperado de la distancia de separación entre las partículas en este estado

$$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle - 2\langle x_1 x_2 \rangle.$$

b) Si las partículas son bosones idénticos, construya el estado normalizado del sistema (simétrico) $|\Psi_B(x_1, x_2)\rangle$ a partir de los estados posibles de una partícula, y calcule el valor esperado de la distancia de separación entre los bosones en este estado.

c) Si las partículas son fermiones idénticos, construya el estado normalizado del sistema (antisimétrico) $|\Psi_F(x_1, x_2)\rangle$ a partir de los estados posibles de una partícula y calcule el valor esperado de la distancia de separación entre los fermiones en este estado.

d) ¿Cuáles están más lejos/cerca entre sí? ¿Por qué?

3. En el ejercicio anterior, suponga ahora que las dos partículas están en un pozo infinito de potencial unidimensional de ancho a. Si una está en el estado $|\psi_n\rangle$ y otra en $|\psi_\ell\rangle$ con $n \neq \ell$, calcule $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ en los casos de que sean:

a) Distinguibles.

b) Bosones idénticos.

c) Fermiones idénticos.

Sugerencia: puede usar que para una partícula en el pozo infinito (con potencial nulo entre $0 < x < a$) los valores esperados de la posición y su cuadrado en el estado n-ésimo son

$$\langle x \rangle_n = \frac{a}{2} \quad \text{y} \quad \langle x^2 \rangle_n = a^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2(n\pi)^2} \right).$$

4. Sea h_0 el hamiltoniano de un sistema de una partícula. Asumimos que este operador actúa sólo en los grados de libertad orbitales (posición) y que tiene tres niveles de energía equidistantes ($\omega_0 > 0$ constante):

$$0, \ \hbar\omega_0 \ \text{ y } \ 2\hbar\omega_0,$$

que son no degenerados en el espacio de estados orbitales $\mathcal{E}_{\vec{r}}$.

En el espacio de spin $\mathcal{E}_s$ cada nivel tiene degeneración $(2s + 1)$ donde s es el spin de la partícula.

Desde el punto de vista de las variables orbitales, sólo nos interesa el subespacio de $\mathcal{E}_{\vec{r}}$ generado por los tres autoestados de h_0.

a) Considere un sistema de tres electrones independientes con un Hamiltoniano

$$H = h_0(1) + h_0(2) + h_0(3).$$

Encuentre los niveles de energía de H y sus degeneraciones en este sistema.

b) Repita lo mismo para un sistema de tres bosones de spin 0.

5. ¿Cuál es la degeneración del segundo nivel de energía del átomo de hidrógeno de Bohr, si consideramos el spin del electrón? Explique.