

Práctico 4: Fórmula de Itô y Teorema de Girsanov¹

1. Se considera el proceso

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t)$$

donde $\{W(t): t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano y $\mu \neq 0$. Se define, para $a < 0 < b$

$$\tau(a) = \inf\{t \geq 0: X(t) \leq a\}, \quad \tau(b) = \inf\{t \geq 0: X(t) \geq b\},$$

(a) Calcular

$$\mathbf{P}(\tau(a) \leq \tau(b)).$$

Para eso, hallar $f(x)$ tal que $f(X(t))$ sea una martingala y aplicar el teorema del nuestro opcional de forma conveniente.

(b) Para $\mu = 1$, $-a = b = 2$ simular el proceso y verificar la fórmula mediante estimaciones.

2. Demostrar mediante el Teorema de Girsanov la fórmula

$$\mathbf{E}f(W_T) = e^{-a^2T/2} \mathbf{E}(e^{-aW(T)} f(W_T + aT)).$$

(b) La fórmula anterior se puede utilizar para evaluar *eventos raros*, es decir, probabilidades o esperanzas de cantidades muy pequeñas. Supongamos por ejemplo que

$$f(x) = (x - 10^6).$$

Calcular mediante simulación, utilizando la identidad de la parte (a):

$$\mathbf{E}f(W(1)).$$

¹Ernesto Mordecki, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay