Modelo de Black Scholes

Ernesto Mordecki

Procesos estocásticos y simulación (2023)

Cmat - 2023

Movimiento Browniano geométrico

- Nos damos un movimiento Browniano W, $\sigma > 0$ y $\mu \in \mathbf{R}$
- El proceso

$$S(t) = S(0)e^{\sigma W(t) + \mu t}, \quad S(0) > 0$$

se llama *Movimiento Browniano Geométrico (MBG)*.
- Se usa el el modelo de Black-Scholes de un mercado financiero.

Ecuación diferencial estocástica para el MBG

Si $f(t,x) = S_0 e^{\sigma x + \mu t}$, entonces

$$S(t) = f(t, W(t)) = S_0 e^{\sigma W(t) + \mu t},$$

es el MBG. Para aplicar al Fórmula de Itô , calculamos:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mu f, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sigma^2 f.$$

y

$$f(t, W(t)) - f(0, W(0)) = \int_0^t \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) f(s, W(s)) ds + \int_0^t \sigma f(s, W(s)) dW(s).$$

Como $f(t, W(t)) = S(t)$, obtenemos

$$S(t) - S(0) = \int_0^t \left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) S(s)ds + \int_0^t \sigma S(s)dW(s).$$

Esta misma expresión, en forma diferencial, es

$$dS(t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) = S_0. \qquad (1)$$

Entonces, como los dos activos en el modelo de Black-Scholes cumplen las ecuaciones

$$\begin{cases} dB(t) = B(t)(rdt), & B(0) = B_0, \\ dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)), & S(0) = S_0. \end{cases}$$

La segunda es una modificación de la primera + ruido.

El modelo de Black y Scholes

El modelo consiste entonces en dos activos en los que se puede invertir:

- Caja de ahorros determinística ($r \geq 0$ es la *tasa de interés*):

$$B_t = B_0 e^{rt}, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

- El segundo activo tiene una evolución aleatoria

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \mu t}, \qquad 0 \leq t \leq T.$$

  donde
  - S_0 es el precio del activo hoy,
  - $\{W_t\}$ es un movimiento browniano
  - μ es el log-retorno medio del activo,
  - σ es la *volatilidad* del activo.

Ejemplo 3: Valuación de opciones

- Supongamos un certo activo (como el precio del petróleo) tiene un cierto valor S_0.
- Modelamos su valor futuro en tiempo T de un activo S mediante
$$S_T = S_0 e^{\sigma W(T) + \mu T}.$$
donde
  - $W(T) \sim \mathbf{N}(0, T)$.
  - r es la tasa de interés del mercado (por ejemplo 0.01),
  - σ es la *volatilidad* del activo.
  - μ es el log-retorno medio del activo.

- Una opción de compra (call option) es un contrato que da el derecho (pero no la obligación) de comprar ese activo en el futuro:
    - el momento de compra futuro es T
    - El *precio convenido (strike price)* es K.
- El precio de ese contrato se calcula mediante la fórmula

$$\boxed{C = C(r, \sigma, K, T) = e^{-rT}\widetilde{\mathbf{E}}(S_T - K)^+}$$

- $\widetilde{\mathbf{E}}$ es un cambio de medida a la Girsanov.

- La fórmula de Black-Scholes da el valor de esa esperanza
- El valor es

$$C(r, \sigma, T, K) = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),$$

- Φ es la distribución normal
- los valores

$$d_{1,2} = \frac{\log(S_0/K) + (r \pm \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

- El principio es el de no arbitraje
- Black y Scholes en 1973 (Nobel de Economía 1997)[1].

[1] Black, Fischer & Scholes, Myron S, 1973. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities,"Journal of Political Economy, University of Chicago Press, vol. 81(3), pages 637-654, May-June.

Opciones asiáticas

- Una *opción asiática* es un activo que paga, en tiempo T, la diferencia entre el promedio del precio de un activo durante un intervalo $[0, T]$ y un precio K (el *strike* o *valor de ejercicio*), cuando esta diferencia es positiva.

- El valor de dicho activo es:

$$A(r, \sigma, T, K) = e^{-rT}\mathbf{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(r)dr - K\right)^+$$

- Aquí $\{S(r)\colon 0 \leq r \leq T\}$ es un MBG con $\mu = r - \sigma^2/2$.

- Una variante de esta opción es su variante multiplicativa u *opción asiática geométrica*, donde cambiamos la media aritmética por la media geométrica, y tiene un valor

$$\tilde{A}(r, \sigma, T, K) = e^{-rT}\mathbf{E}\left(S_0 e^{\frac{1}{T}\int_0^T (\sigma W(r) + \mu r) dr} - K\right)^+$$

- El pago $\tilde{A}$ es mas sencillo de calcular y se utiliza para calcular A usando el método de control de variables.

Opciones sobre el máximo (lookback options)

- Es una variación del contrato anterior, en el que el comprador de la opción recibe el monto

$$\left(\max_{0 \leq t \leq T} S_t - K \right)^+$$

(que es una cantidad mayor que el pago de una opción de compra).

- El precio de esta opción es

$$L(r, \sigma, T, K) = e^{-rT} \mathbf{E} \left(\max_{0 \leq t \leq T} S_t - K \right)^+$$

donde nuevamente $\mu = r - \sigma^2/2$.

- Existen fórmulas cerradas, porque la distribución del máximo de un proceso de Wiener con tendencia en un intervalo $[0, T]$ tiene una densidad que es conocida,

Opciones asiáticas

- Contrato que paga el promedio de los valores registrados en el intervalo.

- El pago es
$$\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K\right)^+$$

- El precio de esta opción es
$$A(r,\sigma,T,K) = e^{-rT}\mathbf{E}\left(\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K\right)^+$$
donde nuevamente $\mu = r - \sigma^2/2$.

- No hay fórmulas cerradas

- Hay que calcular los precios por simulación

Valuación Monte Carlo

- Para valuar activos distinguimos
  - Hay opciones que dependen de un único valor (como las call options)
  - Las otras dependen de *toda la trayectoria*
- Una call option se valua mediante

$$\hat{C} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{d} \left(S_0 e^{\sigma \sqrt{T} Z_k + (r - \sigma^2/2)T} - K \right)^+$$

  donde $Z_1, \ldots, Z_n$ es una muestra normal estándar simulada.
- Aquí usamos que $\sqrt{T} Z \sim W(T) \sim \mathcal{N}(0, T)$.
- En las otras hay que simular **toda** la trayectoria.

Precio de una opcion: Ecuación de Black Scholes

- Construimos un *portafolio* (a_t, b_t), con capital

$$X_t = a_t B_t + b_t S_t$$

- Queremos que replique la opción:

$$X_T = a_T B_T + b_T S_T = f(S_T).$$

- Que sea autofinanciante: X cambia por cambios en B y S unicamente:

$$dX_t = a_t dB_t + b_t dS_t.$$

Precio de la opción

$$V(x,T) = a_0 B_0 + b_0 S_0$$

Construcción del portafolio

- Black y Scholes propusieron buscar una función $H(x,t)$ tal que,
$$X_t = H(S_t, t)$$
- La condición de réplica es $X_T = f(S_T)$, lo que se logra si
$$H(x,T) = f(x).$$
En ese caso el precio de la opción sera
$$V(x,T) = H(S_0, 0).$$

- Para determinar H tal que

$$X_t = a_t B_t + b_t S_t = H(S_t, t)$$

observamos que, como S es función de W, y H es función de S, podemos aplicar la fórmula de Itô, resultando

$$dH = (rSH_x + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 H_{xx} + H_t)dt + H_x S\sigma dW$$

- Por otra parte, como X es autofinanciante,

$$dX = adB + bdS = r(aB + bS)dt + bS\sigma dW$$

$$= rHdt + bS\sigma dW$$

La ecuación de Black-Scholes

Igualando los coeficientes de dW,

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 H_{xx}(S_t,t) + rS_t H_x(S_t,t) + H_t(S_t,t) = rH(S_t,t)$$

que se cumple si:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 H_{xx}(x,t) + rxH_x(x,t) + H_t(x,t) = rH(x,t) \\ \hfill H(x,T) = f(x) \end{cases}$$

que es la *Ecuación de Black-Scholes.* El otro coeficiente importa:

$$b_t = H_x(S_t,t)$$

es la cantidad de S para hacer una *cobertura*.

Fórmula de Black-Scholes

Esta ecuación tiene una solución exacta:

$$V(x,T) = x\Phi(x_1) - e^{-rT}K\Phi(x_0)$$

con

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\log\frac{x}{Ke^{-rT}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \\ x_1 &= x_0 + \sigma\sqrt{T} \end{aligned}$$