Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2023

Práctico 8: Formas multilineales

1. Recordemos la notación dx, dy para la base dual a la base usual de $\mathbb{R}^2$ y dx, dy, dz para la base dual a la usual de $\mathbb{R}^3$.

   Expresar usando las bases anteriores las duales a las siguientes:

   a) $(5,3), (7,-1)$,
   b) $(3,2), (-2,3)$,
   c) $(1,-1,0), (1,1,1), (0,1,-1)$.

2. *a)* Dar una base explícita de $(\mathbb{R}^2)^* \otimes (\mathbb{R}^2)^*$ y de $(\mathbb{R}^3)^* \otimes (\mathbb{R}^3)^*$.
   b) Expresar en esas bases los productos internos usuales de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.
   c) Expresar el determinante 2×2 visto como función bilineal de $(\mathbb{R}^2)^2$ a $\mathbb{R}$ en la base de la parte a.
   d) Expresar la primer coordenada del producto vectorial (producto cruz) en $\mathbb{R}^3$ en la base de la parte a.

3. Dar una base explícita de $(\mathbb{R}^3)^* \otimes (\mathbb{R}^3)^* \otimes (\mathbb{R}^3)^*$. Expresar en esa base la función $\det : (\mathbb{R}^3)^3 \to \mathbb{R}$ que dados tres vectores devuelve el determinante de la matriz 3×3 con esos tres vectores como filas.

4. *a)* Calcular $f \otimes g$ para $f = dx + dy$ y $g = 2dx + 3dy$.
   b) Mostrar que $dx \otimes dx + dx \otimes dy$ es un tensor elemental.
   c) Dar un ejemplo de un tensor no elemental en $(\mathbb{R}^2)^* \otimes (\mathbb{R}^2)^*$.

5. Recordemos que una función bilineal f es simétrica si $f(v,w) = f(w,v)$ para todo $v, w \in V$ y alternada si $f(v,w) = -f(w,v)$ para todo $v, w \in V$.

   Denotamos por $\mathrm{Alt}(V^* \otimes V^*)$ las funciones bilineales alternadas sobre V y por $\mathrm{Sym}(V^* \otimes V^*)$ las simétricas.

   a) Demostrar que $V^* \otimes V^* = \mathrm{Alt}(V^* \otimes V^*) \oplus \mathrm{Sym}(V^* \otimes V^*)$.
   b) Dar bases explícitas de los dos subespacios para $V = \mathbb{R}^2$ y $V = \mathbb{R}^3$.
   c) Sea $f = dx + dy$ y $g = 2dx + 3dy$, descomponer $f \otimes g$ como una forma simétrica más una alternada.
   d) Sea $f = dx + dy + dz$ y $g = 2dx + 3dy + 4dz$, descomponer $f \otimes g$ como suma de una forma simétrica y una alternada.

6. *a)* Demostrar que si f es bilineal y se define $q(v) = f(v,v)$ entonces se puede expresar f en función de q. Esto se llama la identidad de polarización.
   b) Calcular la forma bilineal simétrica $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $q(x,y) = f((x,y),(x,y)) = 3x^2 - xy + y^2$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

7. Recordemos que una forma cuadrática en $\mathbb{R}^d$ es una función polinomial homogénea de grado 2. Es decir una función de la forma $q(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j$ donde los $a_{i,j}$ son coeficientes reales.

   a) Usando el teorema espectral demostrar que para toda forma cuadrática q existe una transformación lineal T tal que $q(T(x_1, \ldots, x_d)) = \pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_k^2$ para cierto k.

b) Deducir que para toda forma bilineal simétrica f existe cierto k y formas lineales $g_1, \ldots, g_k \in V^*$ tales que $f = g_1 \otimes g_1 + \cdots + g_k \otimes g_k$.

c) Encontrar la expresión de la parte anterior para la forma $f = 3dx \otimes dx + dx \otimes dy + dy \otimes dx + dy \otimes dy$.

8. *a*) Demostrar una identidad de polarización para formas trilineales. Es decir dada $f : V^3 \to \mathbb{R}$ multilineal encontrar una expresión para $f(u, v, w)$ como combinación lineal de términos de la forma $f(x, x, x)$.

   b) Escribir en alguna base explícita de las formas trilineales de $\mathbb{R}^2$ la forma correspondiente f tal que $p(x, y) = f((x, y), (x, y), (x, y)) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4z^3$.

9. Dados $f, g \in V^*$ definimos su producto cuña como $f \wedge g = f \otimes g - g \otimes f$.

   a) Mostar que $f \wedge g$ es una forma bilineal alternada, para todo $f, g \in V^*$.

   b) Calcular $(2dx + 3dy) \wedge (dx - dy)$.

   c) Mostrar que toda forma bilineal alternada en $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de 'productos cuña elementales' es decir puede escribirse de forma $f = adx \wedge dy + bdx \wedge dz + cdy \wedge dz$ para ciertos $a, b, c \in \mathbb{R}$. En otras palabras, las formas bilineales alternadas en $\mathbb{R}^3$ son combinaciones lineales de las coordenadas del producto vectorial.

10. Recordemos que una forma bilineal f es no degenerada si $f(v, w) = 0$ para todo v implica que $w = 0$ y $f(v, w) = 0$ para todo w implica que $v = 0$.

    a) Demostrar el teorema de Riesz: Si f es bilineal no degenerada, y $g \in V^*$ entonces existe un único vector $w \in V$ tal que $f(v, w) = g(v)$ para todo v.

    b) Mostrar que $f = dx \otimes dx + dy \otimes dy$ es no degenerada. Encontrar el vector w tal que $f(v, w) = g(v)$ donde $g(x, y) = 5x - 3y$.

    c) Mostrar que $f = dx \otimes dy - dy \otimes dx$ es no degenerada. Encontrar el vector w tal que $f(v, w) = g(v)$ para la misma g de la parte anterior.

    d) Una forma simpléctica, es una forma bilineal alternada no degenerada. Mostrar que $dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ es simpléctica en $\mathbb{R}^4$. Mostrar que si V tiene dimensión impar entonces no existe ninguna forma simpléctica en V.