Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2023

Práctico 7: Ejercicios de examen sobre Producto Interno, Valores singulares, y teorema espectral.

1. (Udelar 2022) Sea V un espacio vectorial real con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

   a) Probar que $u \perp v$ si y solamente si $\|u\| \leq \|u + \alpha v\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

   b) Probar que un subespacio $U < V$ es nulo (es decir $U = \{0\}$) si y solamente si $U^\perp = V$.

   c) Sea $P : V \to V$ una transformación lineal tal que:
   - $P^2 = P$ (es decir, para todo $v \in V$ vale que $P(P(v)) = P(v)$, y,
   - se cumple que $\mathrm{Ker}(P) \perp \mathrm{Im}(P)$ (es decir, si $P(v) = 0$ y $w = P(v')$ para algún $v' \in V$ entonces $\langle v, w \rangle = 0$),

   mostrar que entonces existe un subespacio $W < V$ de forma tal que $P(v) \in W$ para todo $v \in V$ y además se cumple que $\|v - P(v)\| \leq \|v - w\|$ para todo $w \in W$.

   d) Determinar cuál es el espacio W en la parte anterior.

2. (Udelar 2022) Sean $T, S : V \to V$ transformaciones lineales de un espacio vectorial complejo V de dimensión d que conmutan, es decir, $T \circ S = S \circ T$.

   a) Sea λ un valor propio de T y $E_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id})$ su espacio propio asociado. Mostrar que existe $u \in E_\lambda \setminus \{0\}$ que es vector propio de S.

   b) Mostrar con un ejemplo que puede ser vector propio con valor propio diferente.

   c) Dar un ejemplo que muestre que algún vector de E_λ puede no ser vector propio de S.

   d) Mostrar que si T tiene d-valores propios diferentes, entonces existe una base en la cual tanto T como S son diagonales.

3. (Udelar 2023) Supongamos que V es un espacio vectorial complejo con producto interno.

   a) Enunciar y demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

   b) Sea W un subespacio de V. Definir el complemento ortogonal $W^\perp$ de W y mostrar que $W \oplus W^\perp = V$.

   c) ¿Es cierto que toda isometría de V se diagonaliza en una base ortonormal?

4. (Princeton 2005) Una matriz unitaria U preserva el producto interno usual en $\mathbb{C}^n$.

   a) Qué condición debe satisfacer la matriz?

   b) Si los autovalores de U son reales, mostrar que $U^2 = I$.

5. (Northwestern University 2009) Supongamos que T es un operador autoadjunto de un espacio vectorial con producto interno V y existe $v \in V$ tal que $\langle Tv, v \rangle > 1$. Demostrar que existe un autovalor real mayor que 1.

6. (Berkeley 2000) Sea B_1 la base usual de $\mathbb{C}^4$, $B_2 = \langle (1,0,0,0), (1,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,1,1) \rangle$, y $T(a,b,c,d) = ((1-i)a + (2i+1)b, -ia + (i+2)b, 2c, c)$.

   a) Calcular ${}_{B_1}[T]_{B_1}$.

b) Calcular las matrices de cambio de base ${}_{B_1}[I]_{B_2}$ y ${}_{B_2}[I]_{B_1}$.

c) Usando lo anterior mostrar que ${}_{B_2}[T]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) Mostrar que T no es normal respecto al producto interno usual en $\mathbb{C}^4$.

e) Mostrar que existe una base de autovectores de T.

f) Construir un producto interno respecto al cual T es normal.

7. (Berkeley 2001) Sea V un espacio vectorial real con producto interno y $y, z \in V$ vectores fijos. Se define $T(x) = \langle x, y \rangle z$.

   a) Mostrar que T es lineal.

   b) Demostrar que existe la transformación adjunta de T.

   c) Dar una expresión explícita para T^* en términos del producto interno y los vectores y, z.

8. (Princeton 2002) Sea V el espacio vectorial de los polinomios de coeficientes reales con el producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^{+\infty} p(x)q(x)e^{-x}dx.$$

   Construir polinomios ortonormales de grados $0, 1$ y 2.

9. (MIT 2010) El problema es encontrar la curva $y = C + D2^t$ que mejor ajusta los puntos $(t, y) = (0, 6), (1, 4), (2, 0)$.

   a) Escribir el sistema de ecuaciones que debería satisfacer (C, D) si la curva pasara por los tres puntos.

   b) Encontrar (C, D) que mejor ajusta los datos en mínimos cuadrados.

   c) Que valores de y tendrían que tener los puntos con $t = 1, 2, 3$ para que $y = 0$ sea el mejor ajuste.

10. (MIT 2010)

    a) Se considera la rotación R de $120°$ alrededor del eje $x = y = z$. Mostrar que $R(1, 0, 0) = (0, 1, 0), R(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$ y $R(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$.

    b) Encontrar la matriz A de R en la base usual de $\mathbb{R}^3$. Explicar porqué $A^3 = I$. Cuáles son los autovalores de A?

    c) Supongamos que la multiplicación a izquierda por P proyecta ortogonalmente sobre el plano $x + 2y + z = 0$. Calcular tres autovalores y tres autovectores independientes de P (no es necesario calcular P).

11. (MIT 2010) Este problema es sobre la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

    a) Encontrar los autovalores de A^tA y los de AA^t. Para ambas matrices encontrar una base ortonormal de vectores propios.

b) ¿Cuál es el resultado de applicar el procedimiento de Gram-Schmidt a las columnas de A?

c) Si A es cualquier matriz $m \times n$ con $m > n$, justificar porque AA^t no puede ser definida positiva. Es siempre verdad que AA^t es definida positiva? (En caso contrario ¿Qué condición se require sobre A?).

12. (Libro de Gourdon) Supongamos que A, B son matrices $n \times n$ complejas, autoadjuntas, y con valores propios positivos.

    a) Mostrar que si $\det(A) \geq 1$ entonces $\text{Traza}(AH) \geq n(\det(H))^{\frac{1}{2}}$.

    b) Deducir que $\det(A+B)^{\frac{1}{n}} \geq \det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}}$.

    c) Mostrar la parte b sin usar la parte a.