# Formas multilineales reales

Pablo Lessa

## 1. Introducción

En todas estas notas $V$ denota un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con dimensión finita $d$.

El objetivo es introducir los espacios de formas multilineales sobre $\mathbb{R}$ con especial énfasis en las bilineales.

Una motivación para esto es la apareción natural de este tipo de formas cuando se estudian derivadas de orden mayor de funciones de varias variables, o cuando se trabaja con integrales sobre curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$ (y otros subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ con dimensión menor).

Otra es la aparición reciente de los tensores, pensados como matrices *de orden mayor*, es decir que admiten mayor cantidad de subindices para sus entradas, como objeto básico en las librerías de aprendizaje automático tales como TensorFlow. Parece interesante tener una noción básica de la correspondiente teoría *libre de coordenadas* que existe para este tipo de objetos.

El lector interesado puede consultar [Die60] (para aprender sobre el rol de las formas simétricas en el cálculo diferencial), [GP10, Chapter 4] (para el aprender sobre el rol de las formas alternadas en la teoría de integración), [Hac19] (para aprender sobre tensores desde el punto de vista numérico y algebráico), [AAB+15] (para aprender sobre la manipulación de *matrices de orden mayor* y su uso en aprendizaje automático), y [Com14] (para aprender sobre las descomposiciones de tensores y sus aplicaciones prácticas).

### 1.1. Formas multilineales

Estas notas tratan de funciones $f : V^n \to \mathbb{R}$ que son 'multilineales'. Es decir, lineales si fijamos todas las coordenadas menos una.

Para distinguirlas de funciones multilineales con valores en espacios vectoriales de dimensión mayor se les suelen llamar "funcionales multilineales" o "formas multilineales" aunque esta denominación no es universalmente usada.

### 1.2. Formas lineales

Cuando $n = 1$ en la definición anterior obtenemos simplemente una función lineal con valores en $\mathbb{R}$. Cosas como $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 2x + 3y$.

Otro ejemplo de este tipo es la transformación Traza : $M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ que asocia a cada matriz $n \times n$ su traza.

## 1.3. Formas bilineales

Una función bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es algo de la forma

$$f((x, y), (x', y')) = 2xx' + 3xy' + 4yx' + 5yy',$$

donde los coeficientes claramente pueden cambiarse por otras constantes.

Casos particulares interesantes son el producto interno usual en $\mathbb{R}^d$ que sería en este formato

$$g((x, y), (x', y')) = xx' + yy',$$

y el determinante de una matriz $2 \times 2$ vista como funcion de sus columnas

$$h((x, y), (x', y')) = xy' - yx'.$$

## 1.4. Derivadas y formas simétricas

Supongamos que $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es una función infinitamente derivable (i.e. existen las derivadas parciales mixtas de todos los ordenes).

Se suele ver en los cursos de cálculo en varias variables que la derivada de $f$ en un punto $p$ es una transformación lineal $Df(p) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Las derivadas de orden mayor de $f$ en $p$ pueden interpretarse como una función multilineal $D^n f(p) : (\mathbb{R}^d)^n \to \mathbb{R}$, que asocia a cada $n$-upla de vectores la derivada direccional de orden $n$ de $f$ en esas direcciones. Esto da una primer fuente de ejemplos de formas multilineales provenientes del cálculo.

En general este punto de vista "libre de coordenadas" para las derivadas de orden mayor no suele enfatizarse en los cursos introductorios. El estudiante interesado puede mirar el libro de Pugh [Pug02], o el libro de Dieudonée [Die60] donde famosamente se critica la "subordinación servil a la interpretación numérica a toda costa" que nos lleva a introducir la derivada como un número en lugar de una transformación lineal donde muchas de sus propiedades (como la regla de la cadena) son más naturales.

Las funciones multilineales que aparecen como $D^n f(p)$ tienen la particularidad de ser simétricas. Lo cual quiere decir que su valor no cambia al permutar sus argumentos.

Cada forma multilineal simétrica $f : V^n \to \mathbb{R}$ puede identificarse con un polinomio homogéneo de grado $n$ en $d$ variables, donde $d$ es la dimensión del espacio $V$. En el caso de $D^n f(p)$ el polinomio asociado agrupa los términos de grado $n$ del polinomio de Taylor de grado $n$ en $p$ de la función $f$.

## 1.5. Formas alternadas

Otro ejemplo de forma multilineal muy diferente a los anteriores es la función $\det : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$ que asocia a cada $n$-upla de vectores el determinante de la matriz que tiene esos vectores como columnas.

En este caso tenemos $\det(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n) = -\det(v_2, v_1, v_3 \ldots, v_n)$ y en general intercambiar dos vectores cambia el signo de la función.

Como un ejemplo la función $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f((x, y, z), (x', y', z')) = xy' - x'y,$$

es bilineal y alternada.

Todas las formas alternadas se contruyen atravez de este tipo de "subdeterminantes". Esto da lugar a la operación de "producto cuña" o "producto exterior" que juega un rol importante en el Cálculo Vectorial.

Las formas alternadas aparecen naturalmente cuando queremos definir lo que quiere decir integrar a lo largo de una superficie en $\mathbb{R}^3$. Este tipo de integrales son uno de los objetos básicos con los cuales se trabajar en Electromagnetismo.

Por ese motivo algunos cursos de Cálculo Vectorial terminan dando una introducción a las formas multilineales y las operaciones entre ellas durante el curso.

# 2. Espacio dual

Se define el espacio dual de $V$ como

$$V^* = \{\text{funciones lineales } f : V \to \mathbb{R}\}.$$

## 2.1. Base dual

Dada una base $v_1, \ldots, v_d$ de $V$ la base dual se define $f_1, \ldots, f_d \in V^*$ tales que

1. $f_i(v_i) = 1$ para todo $i$,
2. $f_i(v_j) = 0$ para todo $i \neq j$.

**Proposición 1.** *La base dual* $f_1, \ldots, f_d$ *es una base de* $V^*$*, en particular* $\dim(V) = \dim(V^*)$.

Se suele usar $dx, dy$ para denotar la base dual de la base usual de $\mathbb{R}^2$, $dx, dy, dz$ para la base dual de la base usual de $\mathbb{R}^3$, y, cuando se busca ser más sistemático, $dx_1, \ldots, dx_d$ para la base dual de la canónica de $\mathbb{R}^d$.

Por ejemplo, se tiene $dy(1, 2, 3) = 2$ y $dx_5(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1) = 6$. La función definida por

$$f(x, y, z) = 3x - 2y + z,$$

puede escribirse

$$f = 3dx - 2dy + dz.$$

## 2.2. Un ejemplo

Si $v_1, \ldots, v_d$ es una base de $V$ y $f_1, \ldots, f_d$ es la base dual entonces

$$v = f_1(v)v_1 + \cdots + f_d(v)v_d,$$

para todo $v \in V$. Es decir $f_i(v)$ es la coordenada en $v_i$ del vector $v$ al expresarlo como combinación lineal de la base.

Por ejemplo si tomamos la base $B$ de $\mathbb{R}^2$ formada por $v_1 = (1,2), v_2 = (3,4)$, y $C$ denota la base usual. Entonces la matriz

$$_C[I]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

y por lo tanto

$$_B[I]_C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En particular se obtiene que la base dual de $B$ es

$$f_1(x,y) = -2x + \frac{3}{2}y,$$

y

$$f_2(x,y) = x - \frac{1}{2}y.$$

En otras palabras $f_1 = -2dx + \frac{3}{2}dy$ y $f_2 = dx - \frac{1}{2}dy$.

# 3. Producto tensorial

## 3.1. Producto de formas multilineales

Si $f : V^m \to \mathbb{R}$ y $g : V^n \to \mathbb{R}$ son multilineales se define su producto tensorial $f \otimes g : V^{m+n} \to \mathbb{R}$ por la ecuación

$$(f \otimes g)(v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n) = f(v_1, \ldots, v_m)g(w_1, \ldots, w_n).$$

Por ejemplo si $dx, dy, dz$ denota la base dual usual de $\mathbb{R}^3$ entonces tenemos

$$(dx \otimes dy - dy \otimes dx)((1,2,3),(4,5,6)) = 1 \times 5 - 2 \times 4 = 5 - 8 = -3.$$

## 3.2. Tensores elementales

Se llaman tensores elementales a funciones multilineales de la forma

$$f = g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n,$$

donde $g_1, \ldots, g_n \in V^*$.

Por ejemplo $dx \otimes dx + dx \otimes dy$ es un tensor elemental (igual a $dx \otimes (dx + dy)$), pero $dx \otimes dy - dx \otimes dy$ no lo es (¿Podés demostrarlo?).

### 3.3. Producto de espacios

Se define $(V^*)^{\otimes n} = V^* \otimes \cdots \otimes V^*$ donde hay $n$ factores como el conjunto de funciones $f : V^n \to \mathbb{R}$ que son multilineales.

Esta notación se justifica por lo siguiente:

**Teorema 1.** *Se cumple que $(V^*)^{\otimes n}$ está generado por tensores elementales. De hecho, si $f_1, \ldots, f_d$ es una base de $V^*$ entonces $\{f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_n} : 1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq d\}$ es una base de $(V^*)^{\otimes n}$. Como consecuencia obtenemos que $\dim((V^*)^{\otimes n}) = \dim(V)^n = d^n$.*

Como ejemplo obtenemos que $dx \otimes dx, dx \otimes dy, dy \otimes dx, dy \otimes dy$ forman una base de $(\mathbb{R}^2)^* \otimes (\mathbb{R}^2)^*$.

# 4. Formas Bilineales

Nos concentramos ahora en las formas bilineales es decir los elementos de

$$V^* \otimes V^*.$$

Algunos ejemplos son el determinante $2 \times 2$ visto como función de las filas

$$\det((x, y), (x', y')) = xy' - x'y,$$

las componentes del producto vectorial en $\mathbb{R}^3$,

$$f_1((x, y, z), (x', y', z')) = yz' - y'z,$$

$$f_2((x, y, z), (x', y', z')) = x'z - xz',$$

$$f_3((x, y, z), (x', y', z')) = xy' - x'y,$$

y el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$

$$p = dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_d \otimes dx_d.$$

### 4.1. Descomposición en simétrica y alternada

Decimos que una forma bilineal $f$ es simétrica si $f(v, w) = f(w, v)$ para todo $v, w \in V$, y decimos que es alternada si $f(v, w) = -f(w, v)$ para todo $v, w \in V$.

Llamamos $Sym(V^* \otimes V^*)$ y $Alt(V^* \otimes V^*)$ a los subespacios de $V^* \otimes V^*$ formado por las formas bilineales simétricas y alternadas respectivamente.

**Teorema 2.** *Toda forma bilineal se descompone de manera única en suma de una forma simétrica y una alternada. Es decir*

$$V^* \otimes V^* = Sym(V^* \otimes V^*) \oplus Alt(V^* \otimes V^*).$$

### 4.1.1. Ejemplos

Como ejemplo en $(\mathbb{R}^2)^* \otimes (\mathbb{R}^2)^*$ que tiene dimensión 4 el vector $dx \otimes dy - dy \otimes dx$ es base del subespacio de las alternadas mientras que $dx \otimes dx, dx \otimes dy + dy \otimes dx, dy \otimes dy$ es base del subespacio de las formas bilineales simétricas.

En $\mathbb{R}^3$ tenemos

$$dx \otimes dy - dy \otimes dx, dx \otimes dz - dz \otimes dx, dy \otimes dz - dz \otimes dy$$

como base de las alternadas, y

$$dx \otimes dx, dy \otimes dy, dz \otimes dz, dx \otimes dy + dy \otimes dx, dx \otimes dz + dz \otimes dx, dy \otimes dz + dz \otimes dy$$

como base de las simétricas.

## 4.2. Formas bilineales simétricas

El ejemplo básico de forma bilineal simétrica es el producto interno usual en $\mathbb{R}^d$ que puede escribirse

$$dx_1 \otimes dx_1 + \cdots + dx_d \otimes dx_d.$$

### 4.2.1. Polarización

Recordemos que una forma cuadrática en $\mathbb{R}^d$ es una función polinomial del siguiente tipo

$$q(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j,$$

para ciertos coeficientes reales $a_{i,j}$. Al componer una forma cuadrática con una transformación lineal se obtiene una forma cuadrática. Por lo tanto queda bien definido el concepto de forma cuadrática en cualquier espacio vectorial real $V$ como una función de $q : V \to \mathbb{R}$ que tiene la forma anterior en cualquier sistema de coordenadas.

Si $f \in Sym(V^* \otimes V^*)$ definimos la forma cuadrática asociada a $f$ a través de la igualdad

$$q(v) = f(v, v).$$

En el caso de que $f$ sea un producto interno se obtiene que $q(v) = \|v\|^2$ es el cuadrado de la norma asociada a $f$.

**Teorema 3** (Identidad de polarización)**.** *Para toda $f \in Sym(V^* \otimes V^*)$ se cumple*

$$f(v, w) = \frac{1}{4}(f(v + w, v + w) - f(v - w, v - w)) = \frac{1}{4}(q_f(v + w) + q_f(v - w)),$$

*para todo $v, w \in V$, donde $q_f$ es la forma cuadrática asociada a $f$.*

*En particular, $Sym(V^* \otimes V^*)$ es isomorfo mediante el mapa $f \mapsto q_f$ al espacio vectorial de las formas cuadráticas en $V$.*

*Como consecuencia* $\dim(Sym(V^* \otimes V^*)) = \frac{d(d+1)}{2}$*, donde* $d = \dim(V)$*.*

Una consecuencia del teorema anterior es que todo producto interno queda determinado por su norma asosicada.

### 4.2.2. Ejemplo de polarización

Supongamos que $q(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ y queremos encontrar la forma bilineal simétrica $f$ asociada.

Una forma bilineal simétrica general en $\mathbb{R}^2$ se escribe

$$f = adx \otimes dx + b(dx \otimes dy + dy \otimes dx) + cdy \otimes dy.$$

Igualando $f((x, y), (x, y)) = q(x, y)$ obtenemos

$$f = dx \otimes dx + \frac{3}{2}(dx \otimes dy + dy \otimes dx) - dy \otimes y.$$

### 4.2.3. Signatura

Usando el producto interno usual en $\mathbb{R}^d$ podemos escribir

$$q(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j = \langle Ax, x \rangle,$$

donde $A$ es una matriz simétrica (su entrada $i, j$ es $\frac{1}{2}a_{i,j}$ si $i \neq j$) y $x = (x_1, \dots, x_d)$.

Como consecuencia del teorema espectral se obtiene entonces

**Teorema 4** (Teorema de Sylvester)**.** *Toda forma cuadrática en $\mathbb{R}^d$ puede llevarse a la forma*

$$\pm x_1^2 + \cdots + \pm x_k^2,$$

*mediante una substitución lineal.*

El número de signos positivos y negativos suele llamarse la signatura de la forma cuadrática.

Una consecuencia del teorema anterior y la identidad de polarización es

**Teorema 5.** *Si $f \in Sym(V^* \otimes V^*)$ existe $k$, $g_1, \dots, g_k \in V^*$, y cierta elección de signos, tales que*

$$f = \pm g_1 \otimes g_1 \pm \cdots \pm g_k \otimes g_k.$$

## 4.3. Formas bilineales alternadas

Como ejemplo de formas en $Alt(V^* \otimes V^*)$ tenemos las tres componentes del producto vectorial (o producto cruz) de dos vectores en $\mathbb{R}^3$.

Definimos dado $f, g \in V^*$ el producto cuña

$$f \wedge g = f \otimes g - g \otimes f.$$

Se verifica que este producto es una forma bilineal alternada.

**Teorema 6.** *Si $f_1, \dots, f_d$ es una base de $V^*$ entonces $\{f_i \wedge f_j : 1 \leq i < j \leq d\}$ es una base de $Alt(V^* \otimes V^*)$.*

*En particular,* $\dim(Alt(V^* \otimes V^*)) = \frac{d(d-1)}{2}$.

El teorema anterior muestra que la forma bilineal alternada general en $\mathbb{R}^3$ tiene la forma

$$f = adx \wedge dy + bdx \wedge dz + cdy \wedge dz.$$

### 4.3.1. Ejemplos de productos cuña

A modo de ejemplo calculamos

$$(dx_2 \wedge dx_5)((1,2,3,4,5,6),(7,8,9,10,11,12)) = 2 \cdot 11 - 5 \cdot 8 = -18.$$

Un ejercicio interesante para el lector puede ser mostrar que toda forma bilineal alternada en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir como $f \wedge g$ para ciertas formas lineales $f, g$.

Esto no es verdad en dimensión 4 y más, por ejemplo puede verse que

$$dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 \neq f \wedge g$$

para toda $f, g \in (\mathbb{R}^4)^*$. El motivo es que se pueden tomar $v, w$ linealmente independientes en el núcleo de $f$ y $g$ simultáneamente, con esta elección el lado izquierdo evaluado en $(v, w)$ es no nulo, pero el lado derecho no.

## 4.4. Formas bilineales no degeneradas

Una forma bilineal $f \in V^* \otimes V^*$ se dice que es no degenerada si $f(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ implica que $v = 0$.

Un ejemplo es el producto interno usual en $\mathbb{R}^d$. Ejemplos alternados incluyen $dx \wedge dy$ en $\mathbb{R}^2$ y $dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ en $\mathbb{R}^4$.

**Teorema 7** (Representación de Riesz)**.** *Si $f$ es bilineal y no degenerada entonces para toda $g \in V^*$ existe $v \in V$ tal que*

$$f(v, w) = g(w),$$

*para toda $w \in V$.*

Una consecuencia de esto es que si $f$ es no degenerada y $f(v, w) = 0$ para todo $v$ entonces $w = 0$ (es decir se podía definir *no degenerada* de manera simétrica). Para ver esto, dada una tal $w \neq 0$ se toma una forma lineal $g$ con $g(w) \neq 0$ y por el teorema de representación de Riesz debería existir $v$ tal que $f(v, w) = g(w) \neq 0$, lo cual contradice que $f(v, w) = 0$ para toda $v$.

### 4.4.1. Ejemplos de representación de Riesz

Consideremos $g = dx + 2dy$, $f_1 = dx \otimes dx + dy \otimes dy$ el producto interno usual en $\mathbb{R}^2$, y $f_2 = dx \wedge dy$.

Se cumple

$$g(x, y) = f_1((1,2),(x,y)) = f_2((2,-1),(x,y)) = x + 2y,$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lo cual ilustra el teorema de representación.

### 4.4.2. Formas simplécticas

Se llama forma simpléctica en $V$ a una forma bilineal alternada no degenerada. Estos objetos aparecen en Mecánica Analítica cuando se introducen las llamadas ecuaciones de Hamilton-Jacobi para el movimiento.

Dos ejemplos son las formas $dx \wedge dy$ en $\mathbb{R}^2$ y $dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4$ en $\mathbb{R}^4$.

Un resultado básico que quizás el lector pueda pensar, es que una forma simpléctica sólo puede existir en $V$ si $\dim(V)$ es par.

# 5. Formas trilineales y más

Un elemento $f \in (V^*)^{\otimes n}$ se dice que es simétrico si $f(v_1, \dots, v_n) = f(v_{\pi(1)}, \dots, f_{\pi(n)})$ para todo $v_1, \dots, v_n \in V$ y toda permutación $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. En otras palabras si el resultado de aplicar $f$ no depende del orden de los vectores.

La definición de forma alternada es que el signo de $f$ cambia al intercambiar $v_i$ con $v_j$. El ejemplo clásico es el determinante visto como función de las filas.

Para formas trilineales y de orden mayor se sigue cumpliendo que las formas simétricas están en correspondencia mediante una identidad de polarización, con los polinomios homogéneos de grado $n$. Este tipo de formas aparecen como la versión libre de coordenadas de las derivadas de orden mayor de funciones de varias variables (los polinomios homogéneos correspondientes agrupan los términos de igual grado en el polinomio de Taylor de la función).

También se puede extender la definición de producto cuña a $n$ formas lineales y ver que las formas alternadas son generadas por este tipo de productos. Este tipo de formas aparecen cuando se busca integrar sobre superficies y otros subconjuntos de dimensión menor en $\mathbb{R}^d$.

Deja de cumplirse para $n \geq 3$ que las formas simétricas y alternadas generen al resto de las formas $n$-lineales.

# Referencias

[AAB+15] Martín Abadi, Ashish Agarwal, Paul Barham, Eugene Brevdo, Zhifeng Chen, Craig Citro, Greg S. Corrado, Andy Davis, Jeffrey Dean, Matthieu Devin, Sanjay Ghemawat, Ian Goodfellow, Andrew Harp, Geoffrey Irving, Michael Isard, Yangqing Jia, Rafal Jozefowicz, Lukasz Kaiser, Manjunath Kudlur, Josh Levenberg, Dandelion Mané, Rajat Monga, Sherry Moore, Derek Murray, Chris Olah, Mike Schuster, Jonathon Shlens, Benoit Steiner, Ilya Sutskever, Kunal Talwar, Paul Tucker, Vincent Vanhoucke, Vijay Vasudevan, Fernanda Viégas, Oriol Vinyals, Pete Warden, Martin Wattenberg, Martin Wicke, Yuan Yu, and Xiaoqiang Zheng. TensorFlow: Large-scale machine learning on heterogeneous systems, 2015. Software available from tensorflow.org.

[Com14] Pierre Comon. Tensors : A brief introduction. *IEEE Signal Processing Magazine*, 31(3):44–53, 2014.

[Die60] Jean Dieudonné. *Foundations of modern analysis*, volume 10 of *Pure Appl. Math., Academic Press.* Academic Press, New York, NY, 1960.

[GP10] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential topology.* Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, reprint of the 1974 original edition, 2010.

[Hac19] Wolfgang Hackbusch. *Tensor spaces and numerical tensor calculus*, volume 56 of *Springer Ser. Comput. Math.* Cham: Springer, 2nd revised edition edition, 2019.

[Pug02] Charles Chapman Pugh. *Real mathematical analysis.* Undergraduate Texts Math. New York, NY: Springer, 2002.