Facultad de Ciencias, UdelaR. **Álgebras de Lie, curso 2023.**

Práctico 8

En todos los ejercicios menos el último, es $L = \mathfrak{sl}_2(\Bbbk)$ y $W_m = S^m(\Bbbk^2)$. Todos los L-módulos son de dimensión finita. Los isomorfismos son como L-módulos. El cuerpo $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado.

1. El álgebra L es un ideal de $\mathfrak{gl}_2(\Bbbk)$, luego $\mathfrak{gl}_2(\Bbbk)$ es un L-módulo vía la representación adjunta. Hallar una descomposición de $\mathfrak{gl}_2(\Bbbk)$ en suma de L-submódulos irreducibles.

2. Pensamos $L \subset \mathfrak{sl}_3(\Bbbk)$ identificando L con la subálgebra de $\mathfrak{sl}_3(\Bbbk)$ formada por las matrices cuyas últimas fila y columna son nulas. Luego $\mathfrak{sl}_3(\Bbbk)$ es un L-módulo definiendo $x \cdot y = [x, y],\ \forall x \in L,\ y \in \mathfrak{sl}_3(\Bbbk)$.

   a) Probar $\mathfrak{sl}_3(\Bbbk) \simeq W_2 \oplus W_1 \oplus W_1 \oplus W_0$.

   b) Hallar explícitamente una descomposición de $\mathfrak{sl}_3(\Bbbk)$ en suma de L-submódulos irreducibles.

3. Sea V un L-módulo. Probar que V y V^* son isomorfos. *Sugerencia:* considerar primero el caso en que V es irreducible.

4. Probar:

   a) $W_3 \otimes W_2 \simeq W_5 \oplus W_3 \oplus W_1$.

   b) $W_4 \otimes W_2 \simeq W_6 \oplus W_4 \oplus W_2$.

   Nota: en general, vale $W_m \otimes W_n \simeq W_{m+n} \oplus W_{m+n-2} \oplus \cdots \oplus W_{m-n}$, si $m \geq n$.

5. Hallar un vector maximal para cada peso maximal de $W_3 \otimes W_2$.

6. *a*) Probar $S^3(W_2) \simeq W_6 \oplus W_2$.

   b) Hallar una descomposición como la anterior para $S^2(W_3)$. Deducir $S^3(W_2) \simeq S^2(W_3)$.

   Nota: en general, vale $S^2(W_n) \simeq \bigoplus_{i=0}^{[n/2]} W_{2n-4i}$, $\forall n$, siendo $[n/2]$ la parte entera de $n/2$.

7. Probar:

   a) $\Lambda^2(W_2) \simeq W_2$.

   b) $\Lambda^2(W_3) \simeq W_4 \oplus W_0$.

   c) $\Lambda^2(W_4) \simeq \Lambda^3(W_4)$.

8. Sea $L = \mathfrak{sl}_3(\Bbbk)$ y consideramos $V = \Bbbk^3$ como L-módulo con la representación natural.

   a) Probar que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ es el peso maximal de algún L-módulo si y solo si existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $\lambda = m\gamma_1 - n\gamma_3$, siendo $\gamma_1 = e_{11}^*|_{\mathfrak{h}}$ y $\gamma_3 = e_{33}^*|_{\mathfrak{h}}$.

   b) Hallar los pesos de V y V^*. Deducir que V y V^* no son isomorfos.

   c) Probar $V^* \simeq \Lambda^2(V)$.

   d) Probar que $S^2(V)$ y $S^2(V^*)$ son L-módulos irreducibles que no son isomorfos.