Entrega práctico 5

Introducción a la Física de Partículas

Anaclara Alvez

2. La tasa de decaimiento Γ es la probabilidad por unidad de tiempo de que las partículas decaigan en su referencial de reposo. El número de partículas en función del tiempo medido en el referencial que se mueve con las partículas está dado por

$$N(t) = N(0)e^{-\Gamma t}$$

con $N(0)$ el número de partículas en un instante inicial $t = 0$. Si fijamos ese instante inicial en el momento en que el haz atraviesa el primer detector, entonces $N(0) = N_1$.

En un instante t_1 posterior, el número de partículas es N_2. Entonces tenemos que

$$N_2 = N_1 e^{-\Gamma t_1}$$

De esta expresión podemos despejar la tasa de decaimiento

$$\Gamma = \frac{1}{t_1} \log\left(\frac{N_1}{N_2}\right)$$

Para determinar el intervalo de tiempo transcurrido en el referencial de reposo, utilizamos el dato de que en el referencial del laboratorio, el haz viajó una distancia L a una velocidad βc. Es decir que el intervalo transcurrido en el laboratorio es

$$\Delta t = \frac{L}{\beta c}$$

Entonces en el referencial de reposo, el tiempo transcurrido es

$$\Delta t' = t_1 = \frac{L}{\gamma \beta c} = \frac{L\sqrt{1-\beta^2}}{\beta c}$$

Sustituyendo en la expresión para la tasa de decaimiento tenemos

$$\Gamma = \frac{\beta c}{L\sqrt{1-\beta^2}} \log\left(\frac{N_1}{N_2}\right)$$

Por último la vida media de las partículas es

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{L\sqrt{1-\beta^2}}{\beta c \log\left(\frac{N_1}{N_2}\right)}}$$

5. Siguiendo la sugerencia, estimamos la amplitud de transición del estado inicial al final como

$$\mathcal{M} = \alpha m_\pi c$$

que tiene dimensiones de momento y un factor $\alpha^{1/2}$ por cada fotón producido.

La regla de oro para el decaimiento del pión a dos fotones se puede escribir como

$$\Gamma = \frac{S}{2\hbar m_\pi} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) \frac{1}{2\sqrt{|\vec{p}_2|^2 + m_2^2 c^2}} \frac{1}{2\sqrt{|\vec{p}_3|^2 + m_3^2 c^2}} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3}$$

donde integramos en los 3-momentos de los fotones. Aquí el factor de simetría S es $1/2$, porque hay dos partículas idénticas en el estado final, y las masas de los fotones son $m_2 = m_3 = 0$. Entonces

$$\Gamma = \frac{1}{16\hbar m_\pi} \int |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3) \frac{1}{|\vec{p}_2|} \frac{1}{|\vec{p}_3|} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3}$$

Luego, podemos separar la componente temporal de las espaciales en la delta, y tenemos

$$\delta^4(p_1 - p_2 - p_3) = \delta(p_1^0 - p_2^0 - p_3^0)\delta^3(\vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3)$$

Como estamos en el referencial de reposo del pión, $\vec{p}_1 = 0$. Además, $p_1^0 = m_\pi c$, y para los fotones, como no tienen masa $p_2^0 = |\vec{p}_2|$, y $p_2^0 = |\vec{p}_2|$. Entonces

$$\delta^4(p_1 - p_2 - p_3) = \delta(m_\pi c - |\vec{p}_2| - |\vec{p}_3|)\delta^3(\vec{p}_2 + \vec{p}_3)$$

Con esto podemos integrar en d^3p_3, y por la segunda delta nos queda la expresión que teníamos evaluada en $\vec{p}_3 = -\vec{p}_2$

$$\Gamma = \frac{1}{16\hbar m_\pi}\int |\mathcal{M}|^2(2\pi)\delta(m_\pi c - 2|\vec{p}_2|)\frac{1}{|\vec{p}_2|^2}\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3}$$

Utilizamos ahora nuestra estimación de $|\mathcal{M}|$ y hacemos la integral en coordenadas esféricas

$$\Gamma = \frac{(\alpha m_\pi c)^2}{64\pi^2\hbar m_\pi}\int_0^\infty d|\vec{p}_2|\delta(m_\pi c - 2|\vec{p}_2|)\int d\Omega$$

La integral del diferencial de ángulo sólido es 4π. Usamos que

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a} \Rightarrow \delta(m_\pi c - 2|\vec{p}_2|) = \frac{\delta(\frac{m_\pi c}{2} - |\vec{p}_2|)}{2}$$

Entonces

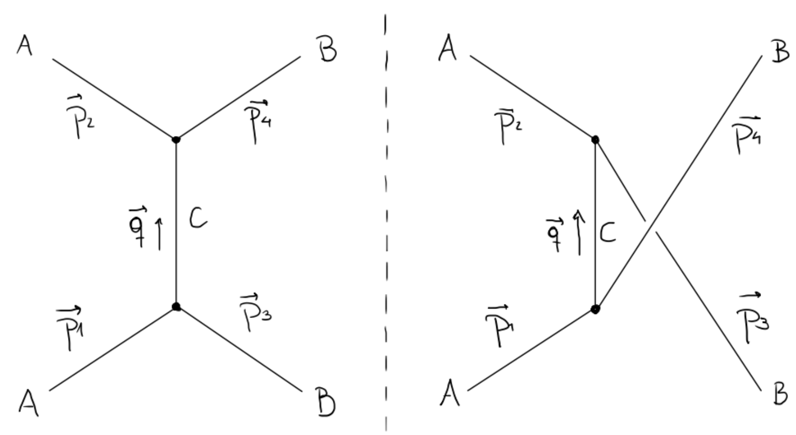
$$\Gamma = \frac{(\alpha m_\pi c)^2}{16\pi\hbar m_\pi}\frac{1}{2} = \frac{\alpha^2 c^2 m_\pi}{32\pi\hbar}$$

La vida media del pión (teniendo en cuenta sólo este decaimiento) es entonces

$$\boxed{\tau = \frac{32\pi\hbar}{\alpha^2 c^2 m_\pi} = 9.21 \times 10^{-18}\,\text{s}}$$

En el PDG vemos que la vida media del π^0 es en realidad 8.52×10^{-17} s, y el pión casi siempre decae a dos fotones (casi 99% de los decaimientos), así que la aproximación de considerarlo como una partícula elemental no es tan buena.

12. Para calcular la sección eficaz, en primer lugar necesitamos la amplitud de transición del estado inicial al final. Para eso consideramos los diagramas de Feynmann de orden más bajo de la teoría con $A + A$ en el estado inicial y $B + B$ en el final, que son



Para el primero, como $m_C = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_1' &= -g^2\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\frac{i}{q^2 - m_C^2c^2}(2\pi)^4\delta^4(p_4 - p_2 - q)(2\pi)^8\delta^4(p_1 - p_3 - q) \\ &= \frac{-ig^2\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(p_4 - p_2)^2} \end{aligned}$$

y entonces

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2}$$

y para el segundo

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_2' &= -g^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - m_C^2 c^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_4 - p_1 - q)(2\pi)^8 \delta^4(p_2 - p_3 - q) \\ &= \frac{-ig^2 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(p_3 - p_2)^2} \end{aligned}$$

y entonces

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{g^2}{(p_3 - p_2)^2}$$

Entonces la amplitud total es

$$\mathcal{M} = -g^2 \left[\frac{1}{(p_4 - p_2)^2} + \frac{1}{(p_3 - p_2)^2} \right]$$

Calculamos primero la sección eficaz en el referencial del centro de masa. Para este caso usamos la expresión que dedujimos en clase

$$\frac{d\sigma_{1+2\to 3+4}}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{|\vec{p}_3|}{|\vec{p}_1|}$$

Aplicamos la conservación del cuadrimomento en la colisión. Como estamos en el centro de masa, en el estado inicial $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$, y como las partículas son iguales $E_1 = E_2 = E$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 2E \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_3 + E_4 \\ \vec{p}_3 + \vec{p}_4 \end{pmatrix}$$

de donde $\vec{p_4} = -\vec{p}_3$, y por lo tanto como las partículas del estado final también son iguales, $E_3 = E_4 = E$. Con esto y usando que el factor de simetría es $1/2$ tenemos

$$\frac{d\sigma_{A+A\to B+B}}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{|\mathcal{M}|^2}{8E^2} \frac{|\vec{p}_1|}{|\vec{p}_3|}$$

Calculamos ahora los denominadores que aparecen en la amplitud. Tenemos

$$\begin{aligned} (p_4 - p_2)^2 &= m_A^2 - 2p_4 \cdot p_2 \\ (p_3 - p_2)^2 &= m_A^2 - 2p_3 \cdot p_2 \end{aligned}$$

donde usamos que $p^2 = m^2c^2$ y que $m_B = 0$. Además

$$\begin{aligned} p_4 \cdot p_2 &= E^2/c^2 - \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_1 \\ p_3 \cdot p_2 &= E^2/c^2 + \vec{p}_3 \cdot \vec{p}_1 \end{aligned}$$

Si θ es el ángulo que forman $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_3$ tenemos

$$\begin{aligned} (p_4 - p_2)^2 &= m_A^2c^2 - 2E^2/c^2 + 2|\vec{p}_3||\vec{p}_1|\cos\theta \\ (p_3 - p_2)^2 &= m_A^2c^2 - 2E^2/c^2 - 2|\vec{p}_3||\vec{p}_1|\cos\theta \end{aligned}$$

La amplitud queda entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= -g^2 \left[\frac{1}{m_A^2c^2 - 2E^2/c^2 + 2|\vec{p}_3||\vec{p}_1|\cos\theta} + \frac{1}{m_A^2c^2 - 2E^2/c^2 - 2|\vec{p}_3||\vec{p}_1|\cos\theta} \right] \\ &= -g^2 \left[\frac{2(m_A^2c^2 - 2E^2/c^2)}{(m_A^2c^2 - 2E^2/c^2)^2 - 4|\vec{p}_3|^2|\vec{p}_1|^2\cos^2\theta} \right] \end{aligned}$$

Usamos finalmente que $|\vec{p}_3| = E/c$ porque la partícula 3 no tiene masa, mientras que $|\vec{p}_1| = \sqrt{E^2/c^2 - m_A^2 c^2}$ y obtenemos la sección eficaz diferencial en el referencial del centro de masa

$$\boxed{\frac{d\sigma^{\text{CM}}_{A+A\to B+B}}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi}\right)^2 \frac{g^4}{2E}\left[\frac{(m_A^2c^4 - 2E^2)}{(m_A^2c^4 - 2E^2)^2 - 4E^2(E^2 - m_A^2c^4)\cos^2\theta}\right]^2 \frac{1}{\sqrt{E^2 - m_A^2c^4}}}$$

Integramos la expresión anterior para obtener la sección eficaz total. La dependencia angular está sólo en el coseno, entonces la integral que tenemos que hacer es de la forma

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \frac{C}{(a - b\cos^2\theta)^2} = 2\pi C \int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin\theta}{(a - b\cos^2\theta)^2}$$

Haciendo el cambio de variable $u = \sqrt{b/a}\cos\theta$ y buscando la primitiva en Wolfram tenemos

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{2\pi C}{a^2\sqrt{b/a}} \int_{-\sqrt{b/a}}^{\sqrt{b/a}} \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{2\pi C}{a^2\sqrt{b/a}} \left[\frac{\tanh^{-1}(u)(1-u^2) + u}{2 - 2u^2}\right]\Bigg|_{-\sqrt{b/a}}^{\sqrt{b/a}} \\
&= \frac{2\pi C}{a^2\sqrt{b/a}} \left[\frac{\tanh^{-1}(\sqrt{b/a})(1 - b/a) + \sqrt{b/a}}{1 - b/a}\right] \\
&= \frac{2\pi C}{a}\left[\sqrt{1/ab}\tanh^{-1}(\sqrt{b/a}) + \frac{1}{a-b}\right]
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de las constantes a, b y C y observando que si desarrollamos el cuadrado en a, $a - b = (m_A^2c^4)^2$

$$\boxed{\begin{aligned}
\sigma^{\text{CM}} &= \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi}\right)^2 \frac{\pi g^4}{E} \frac{1}{\sqrt{E^2 - m_A^2c^4}} \\
&\quad\times \left[\frac{1}{2E(m_A^2c^4 - 2E^2)\sqrt{E^2 - m_A^2c^4}} \tanh^{-1}\left(\frac{2E\sqrt{E^2 - m_A^2c^4}}{(m_A^2c^4 - 2E^2)}\right) + \frac{1}{(m_A^2c^4)^2}\right]
\end{aligned}}$$

Calculamos ahora el límite no relativista de la sección eficaz diferencial y total. En este límite, $E \approx m_Ac^2$, entonces

$$\begin{aligned}
(2E^2 - m_A^2c^4) &\approx m_A^2c^4 \\
\sqrt{E^2 - m_A^2c^4} &= |\vec{p}_1| = m_Avc
\end{aligned}$$

Usamos estas aproximaciones en la sección eficaz diferencial, y despreciamos el término del coseno en el denominador, que es de orden $(m_Ac^2)^2|\vec{p}|^2c^2 \ll (m_A^2c^4)^4$, y obtenemos

$$\frac{d\sigma^{\text{CM}}_{A+A\to B+B}}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi}\right)^2 \frac{g^4}{2m_Ac^2}\left[\frac{(m_A^2c^4)}{(m_A^2c^4)^2}\right]^2 \frac{1}{|\vec{p}_1|c}$$

Reordenando tenemos

$$\boxed{\frac{d\sigma^{\text{CM,NR}}_{A+A\to B+B}}{d\Omega} \approx \left(\frac{\hbar g^2c^3}{8\pi m_A^3c^3}\right)^2 \frac{1}{2}\frac{c}{v}}$$

Para la sección eficaz total hacemos las mismas sustituciones y tenemos

$$\begin{aligned}
\sigma^{\text{CM,NR}} &= \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi}\right)^2 \frac{\pi g^4}{m_Ac^2}\frac{1}{|\vec{p}|c}\left[\frac{1}{2m_Ac^2(m_A^2c^4)|\vec{p}|c}\tanh^{-1}\left(\frac{2m_Ac^2|\vec{p_c}|c}{m_A^2c^4}\right) + \frac{1}{(m_A^2c^4)^2}\right] \\
&= \left(\frac{\hbar g^2c^3}{8\pi}\right)^2 \frac{\pi}{m_A^2c^3v}\left[\frac{1}{2m_A^4c^7v}\tanh^{-1}\left(\frac{2|\vec{p}|}{m_Ac}\right) + \frac{1}{m_A^4c^8}\right] \\
&= \left(\frac{\hbar g^2c^3}{8\pi}\right)^2 \frac{\pi}{m_A^2c^3v}\left[\frac{1}{2m_A^4c^7v}\frac{2|\vec{p}|}{m_Ac} + \frac{1}{m_A^4c^8}\right] = \left(\frac{\hbar g^2c^3}{8\pi}\right)^2 \frac{\pi}{m_A^2c^3v}\frac{2}{m_A^4c^8}
\end{aligned}$$

donde usamos que $|\vec{p}| \ll mc$, y entones $\tanh^{-1}(x) \approx x$. Reordenando tenemos finalmente

$$\boxed{\sigma^{\mathrm{CM,NR}} \approx 2\pi \left(\frac{\hbar g^2}{8\pi m_A^3 c^3}\right)^2 \frac{c}{v}}$$

En el límite ultrarelativista, $E \approx |\vec{p}|c \gg mc^2$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}(2E^2 - m_A^2 c^4) &\approx 2E^2 \\ (E^2 - m_A^2 c^4) &\approx E^2 \\ \sqrt{E^2 - m_A^2 c^4} &\approx E\end{aligned}$$

entonces la sección eficaz diferencial es

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma^{\mathrm{CM,UR}}_{A+A\to B+B}}{d\Omega} &\approx \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi}\right)^2 \frac{g^4}{2E}\left[\frac{-2E^2}{(2E^2)^2 - 4E^2(E^2)\cos^2\theta}\right]^2 \frac{1}{E} \\ &= \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi}\right)^2 \frac{g^4}{2E^2}\left[\frac{1}{2E^2 - 2(E^2)\cos^2\theta}\right]^2\end{aligned}$$

y finalmente obtenemos

$$\boxed{\frac{d\sigma^{\mathrm{CM,UR}}_{A+A\to B+B}}{d\Omega} \approx \left(\frac{\hbar g^3 c^3}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{8E^6}\left[\frac{1}{1-\cos^2\theta}\right]^2}$$

Para La sección eficaz total tenemos

$$\sigma^{\mathrm{CM,UR}} \approx \left(\frac{\hbar c^3}{8\pi}\right)^2 \frac{\pi g^4}{E}\frac{1}{E}\left[\frac{1}{2E^2(2E^2)}\tanh^{-1}\left(\frac{2E^2}{2E^2}\right) + \frac{1}{(m_A^2 c^4)^2}\right]$$

Pero $\tanh^{-1}(x) \to \infty$ cuando $x \to 1$, entonces

$$\boxed{\sigma^{\mathrm{CM,UR}} \to \infty}$$

Para calcular la sección eficaz diferencial en el referencial del laboratorio, donde la partícula 2 está en reposo, usamos la expresión que se obtiene en el ejercicio 9

$$\frac{d\sigma_{1+2\to 3+4}}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2 \frac{S|\mathcal{M}|^2|\vec{p}_3|}{m_2|\vec{p}_1|(E_1 + m_2c^2 - |\vec{p}_1|c\cos\theta)}$$

donde θ es el ángulo que forma el momento de la partícula 3 con el de la partícula 1.

Calculamos de nuevo los denominadores que aparecen en la amplitud

$$\begin{aligned}(p_4 - p_2)^2 &= m_A^2 - 2p_4 \cdot p_2 \\ (p_3 - p_2)^2 &= m_A^2 - 2p_3 \cdot p_2\end{aligned}$$

Además como $p_2 = (m_A c, 0)$

$$\begin{aligned}p_4 \cdot p_2 &= m_A E_4 \\ p_3 \cdot p_2 &= m_A E_3\end{aligned}$$

Si θ es el ángulo que forman $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_3$ tenemos

$$\begin{aligned}(p_4 - p_2)^2 &= m_A^2 c^2 - 2m_A E_4 \\ (p_3 - p_2)^2 &= m_A^2 c^2 - 2m_A E_3\end{aligned}$$

Además

$$(p_1 - p_3)^2 = m_A^2 c^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = m_A^2 c^2 - 2E_1 E_3/c^2 + E_3 |\vec{p}_1|/c \cos\theta$$

donde usamos que la partícula 3 no tiene masa. Pero sabemos que $(p_1 - p_3)^2 = (p_4 - p_2)^2$, entonces

$$E_4 = \frac{E_3}{m_A c^2} (E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta)$$

Para escribir todo en términos del momento y la energía de la partícula incidente 1, usamos la conservación de la energía

$$E_1 + m_A c^2 = E_3 + E_4 = \frac{E_3}{m_A c^2} \left(m_A c^2 + E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta \right)$$

de donde

$$E_3 = \frac{m_A c^2 (E_1 + m_A c^2)}{m_A c^2 + E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta}$$

La amplitud es entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} = -g^2 &\left[\frac{1}{m_A^2 c^2 - 2m_A \frac{m_A c^2 (E_1 + m_A c^2)}{m_A c^2 + E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta}} + \frac{1}{m_A^2 c^2 - 2m_A \frac{(E_1 + m_A c^2)(E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta)}{m_A c^2 + E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta}} \right] \\
&= -g^2 \left[\frac{m_A c^2 + E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta}{(m_A c^2 + E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta) m_A^2 c^2 - 2m_A^2 c^2 (E_1 + m_A c^2)} + \right. \\
&\left. + \frac{(m_A c^2 + E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta)}{m_A^2 c^2 (m_A c^2 + E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta) - 2m_A (E_1 + m_A c^2)(E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta)} \right]
\end{aligned}$$

Finalmente la sección eficaz diferencial queda

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{d\sigma^{\mathrm{LAB}}_{A+A\to B+B}}{d\Omega} &= \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2 \frac{g^4/c}{2m_A |\vec{p}_1| (E_1 + m_2 c^2 - |\vec{p}_1| c \cos\theta)} \frac{m_A c^2 (E_1 + m_A c^2)}{m_A c^2 + E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta} \\
&\times \left[\frac{m_A c^2 + E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta}{(m_A c^2 + E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta) m_A^2 c^2 - 2m_A^2 c^2 (E_1 + m_A c^2)} + \right. \\
&\left. + \frac{(m_A c^2 + E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta)}{m_A^2 c^2 (m_A c^2 + E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta) - 2m_A (E_1 + m_A c^2)(E_1 - |\vec{p}_1| c \cos\theta)} \right]^2
\end{aligned}}$$

Esto se ve imposible de integrar así que sólo voy a calcular la sección eficaz total en los límites no relativista y ultrarelativista.

En el límite no relativista $E \approx mc^2 >> |\vec{p}|c$, entonces despreciando todos los términos $|\vec{p}_1|c$ que están sumados a energías, y sustituyendo E por $m_A c^2$ en todas las sumas obtenemos

$$\frac{d\sigma^{\mathrm{LAB,NR}}_{A+A\to B+B}}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar g^2}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{c} \frac{1}{4m_A |\vec{p}_1| m_A c^2} \frac{2(m_A c^2)^2}{2m_A c^2} \left[\frac{2m_A c^2}{-2m_A^3 c^4} + \frac{2m_A c^2}{-2m_A^3 c^4} \right]^2$$

Simplificando y usando que $|\vec{p}_1| = m_A v$ obtenemos

$$\boxed{\frac{d\sigma^{\mathrm{LAB,NR}}_{A+A\to B+B}}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar g^2}{8\pi m_A^3 c^3}\right)^2 \frac{c}{v}}$$

Podemos calcular la sección eficaz total en el límite no relativista integrando esta expresión. Como no hay dependencia angular, la integral agrega un factor 4π y entonces

$$\boxed{\sigma^{\mathrm{LAB,NR}}_{A+A\to B+B} = 4\pi \left(\frac{\hbar g^2}{8\pi m_A^3 c^3}\right)^2 \frac{c}{v}}$$

Por otro lado, en el límite ultrarelativista, $E \approx |\vec{p}|c \gg mc^2$ y tenemos

$$E_1 + m_A c^2 \approx E_1$$
$$E_1 - |\vec{p}_1|c\cos\theta \approx |\vec{p}_1|c(1-\cos\theta)$$

y sustituyendo esto en la expresión para la sección eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma^{\rm LAB}_{A+A\to B+B}}{d\Omega} \approx \left(\frac{\hbar g^2}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{2m_A|\vec{p}_1|^2c^2(1-\cos\theta)} \frac{m_A c^2|\vec{p}_1|c}{|\vec{p}_1|c(1-\cos\theta)}$$
$$\times \left[\frac{|\vec{p}_1|c(1-\cos\theta)}{|\vec{p}_1|c(1-\cos\theta)m_A^2c^2 - 2m_A^2c^2|\vec{p}_1|c} + \frac{|\vec{p}_1|c(1-\cos\theta)}{m_A^2c^2|\vec{p}_1|c(1-\cos\theta) - 2m_A|\vec{p}_1|^2c^2(1-\cos\theta)}\right]^2$$

En el segundo término de la suma adentro del paréntesis, como $|\vec{p}_1|c \gg m_A c$, podemos quedarnos sólo con el término en $|\vec{p}_1|^2$ y despreciar el otro. Haciendo esto y simplificando

$$\frac{d\sigma^{\rm LAB,UR}_{A+A\to B+B}}{d\Omega} \approx \left(\frac{\hbar g^2}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{2|\vec{p}_1|^2(1-\cos\theta)^2}\left[-\frac{(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)m_A^2c^2} - \frac{1}{2m_A c|\vec{p}_1|}\right]^2$$

De los términos del paréntesis, podemos despreciar el que tiene $|\vec{p}_1|$ en el denominador, porque $|\vec{p}_1|c >> m_A c^2$ y entonces $\frac{1}{|\vec{p}_1|c} \ll \frac{1}{m_A c^2}$. Obtenemos

$$\boxed{\frac{d\sigma^{\rm LAB,UR}_{A+A\to B+B}}{d\Omega} \approx \left(\frac{\hbar g^2}{8\pi m_A^2 c^2}\right)^2 \frac{1}{2|\vec{p}_1|^2(1+\cos\theta)^2}}$$

Integramos para hallar la sección eficaz total

$$\sigma^{\rm LAB,UR} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \left(\frac{\hbar g^2}{8\pi m_A^2 c^2}\right)^2 \frac{1}{2|\vec{p}_1|^2(1+\cos\theta)^2} = \left(\frac{\hbar g^2}{8\pi m_A^2 c^2}\right)^2 \frac{2\pi}{2|\vec{p}_1|^2}\int_0^{\pi} d\theta \frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$
$$= \left(\frac{\hbar g^2}{8\pi m_A^2 c^2}\right)^2 \frac{2\pi}{2|\vec{p}_1|^2}\int_{-1}^{1} \frac{du}{(1+u)^2} = \left(\frac{\hbar g^2}{8\pi m_A^2 c^2}\right)^2 \frac{2\pi}{2|\vec{p}_1|^2}\left[-\frac{1}{(1+u)}\right]\Bigg|_{-1}^{1}$$

Pero $\frac{1}{1+u} \to \infty$ cuando $u \to -1$, entonces

$$\boxed{\sigma^{\rm LAB,UR} \to \infty}$$