Probablidad de fijación de un alelo en el modelo de Wright-Fisher con selección[1]

Existen dos alelos, A y a. La aptitud (fitness) de A es 1 y la de a es $1-s$, donde $s \geq 0$.

El generador infinitesimal del proceso es

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2}x(1-x)f''(x) + \gamma x(1-x)f'(x). \tag{1}$$

donde $\gamma = 2Ns$. Eso quiere decir que el proceso que indica la proporción del alelo A es X_t, entonces se verifca

$$X_t = x + \int_0^t \sqrt{X_s(1-X_s)}dW_s + \gamma \int_0^t X_s(1-X_s)dt, \tag{2}$$

es decir, un proceso de difusión con $dX_t = adt + bdW_t$ con

$$a(x) = \gamma x(1-x), \qquad b(x) = \sqrt{x(1-x)}.$$

Para verificar que al generador (1) corresponde una EDE (2), aplicamos la fórmula de Itō a $f(X_t)$ y obtenemos

$$f(X_t) - f(x) = \int_0^t \mathcal{L}f(X_s)\,ds + \int_0^t f'(X_s)\,dW_s.$$

Para calcular la probabilidad de fijación de un alelo, buscamos una función $f(x)$ tal que $f(X_t)$ es una martingala. Si f cumple eso, aplicamos el teorema del muestro opcional, definiendo los tiempos de fijación de los alelos a Y A, respectivamente, mediante

$$\tau_0 = \inf\{t \geq 0\colon X_t\}, \quad \tau_1 = \inf\{t \geq 0\colon X_t\}$$

Se fija el alelo A cuando $\tau_1 < \tau_0$. Además

$$\mathbf{P}(\tau_1 < \tau_0) + \mathbf{P}(\tau_0 < \tau_1) = 1, \tag{3}$$

porque alguno de los dos alelos se fija siempre (con probabilidad 1). Entonces, aplicando el teorema del muestreo opcional de Doob para esa martingala $f(X_t)$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbf{E}(f(X_{\tau_1\wedge\tau_0}) = \mathbf{E}(f(X_{\tau_1\wedge\tau_0}\mathbf{1}_{\tau_1<\tau_0}) + \mathbf{E}(f(X_{\tau_1\wedge\tau_0}\mathbf{1}_{\tau_0<\tau_1}) \\ &= f(1)\,\mathbf{P}(\tau_1 < \tau_0) + f(0)\,\mathbf{P}(\tau_0 < \tau_1) \end{aligned} \tag{4}$$

Resolviendo el sistema lineal dos por dos definido por las ecuaciones (3) y (4), obtenemos

$$\mathbf{P}(\tau_1 < \tau_0) = \frac{f(1) - f(x)}{f(1) - f(0)}. \tag{5}$$

[1] Ejemplo 7.4 del libro de Durret

Ahora calculamos la f. Para eso se precisa $\mathcal{L}f(x) = 0$, es decir

$$\frac{1}{2}x(1-x)f''(x) + \gamma x(1-x)f'(x) = \frac{1}{2}x(1-x)\left[f''(x) + 2\gamma f'(x)\right] = 0,$$

Resolvemos entonces $[f''(x) + 2\gamma f'(x) + 0$ que tiene solución general

$$f(x) = \alpha + \beta e^{-2\gamma x}.$$

Aplicamos esta fórmula en (5) (observando que el resultado no depende ni de α ni de β) y obtenemos

$$\mathbf{P}(\tau_1 < \tau_0) = \frac{1 - e^{-2\gamma x}}{1 - e^{-2\gamma}}$$

Observemos que si $\gamma \to 0$ (caso sin selección) obtenemos

$$\lim_{\gamma \to 0} \mathbf{P}(\tau_1 < \tau_0) = x.$$