EXAMEN DE ONDAS

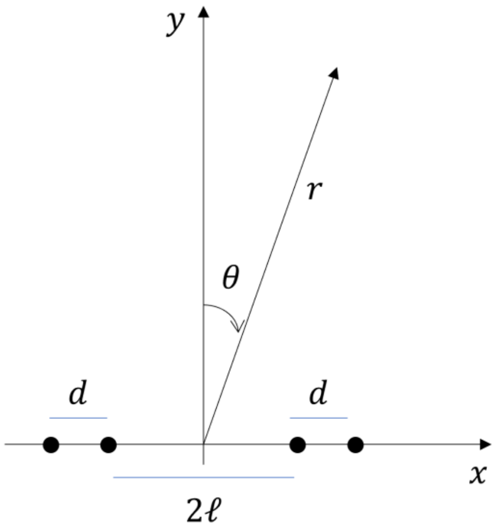
PERÍODO REGULAR 18/12/2023

Ejercicio 1. Considere una membrana circular de radio a y densidad superficial de masa ρ que vibra en su modo fundamental dado por:

$$z(r,t) = AJ_0(k_{01}r)\cos(\omega_{01}t + \phi)$$

donde z representa el desplazamiento vertical de la membrana, ω_{01} es la frecuencia de vibración del modo fundamental, $k_{01} = j_{01}/a$ y $A \in \mathbb{R}$ es la amplitud en el centro de la membrana. (a) Hallar la energía mecánica total de la membrana para esta vibración. **Sugerencia:** Para la integración en la variable r realizar cambios de variables apropiados de manera de llevar la integral a la forma de la relación de ortogonalidad de las funciones de Bessel. (b) Una membrana circular de radio $a = 0{,}25$ m y densidad $\rho = 1{,}0\ kg/m^2$ se estira con una tensión $|\vec{T}| = 25{,}0 \times 10^3\ N/m$. Hallar la frecuencia del modo fundamental y su energía mecánica total si la amplitud de vibración en el centro es $1{,}0 \times 10^{-3} m$.

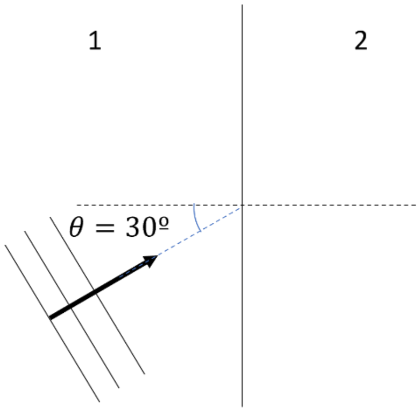
Ejercicio 2.



Considere el arreglo lineal de 4 fuentes simples idénticas que se muestra en la figura. Las fuentes vibran a la misma frecuencia y en fase entre sí. (a) Mostrar que, en la aproximación de campo lejano ($r \gg \ell, d$), la presión acústica del arreglo se puede escribir como:

$$P(r,\theta) = P_s(r)H(\theta)$$

donde $P_s(r)$ es el campo acústico de una única fuente simple y $H(\theta)$ es la directividad del arreglo que deberá hallar explícitamente. (b) Si las fuentes emiten en agua ($c = 1500\ m/s$) a una frecuencia $f = 15 \times 10^3$ Hz y $d = 1{,}5\ cm$, hallar el valor de ℓ tal que el campo lejano tenga el primer nodo en $\theta = 45º$.



Ejercicio 3. Una onda plana de intensidad media I_i se propaga en un medio con velocidad $c_1 = 1250\ m/s$ y densidad $\rho_1 = 860\ kg/m^3$. La onda arriba a la interfase con un segundo medio formando un ángulo $\theta = 30º$ con respecto a la normal como se muestra en la figura. En el medio 2 la velocidad es $c_2 = 1500\ m/s$ y su densidad es $\rho_2 = 1000\ kg/m^3$. (a) Hallar el ángulo de refracción en el segundo medio. (b) Hallar la intensidad media de la onda reflejada y de la onda transmitida. (c) ¿Es la suma de

intensidades de la onda reflejada y transmitida igual a la de la onda incidente? Justifique el resultado obtenido.

DATOS Y FÓRMULAS ÚTILES

- Energía cinética de un elemento de área $dS = rdrd\theta$ de una membrana circular:

$$dE_c = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dS$$

- Energía potencial de un elemento de área $dS = rdrd\theta$ de una membrana circular:

$$dE_c = \frac{1}{2}|\vec{T}|\left[\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right]dS$$

- Relación de ortogonalidad de las funciones de Bessel

$$\int_0^1 xJ_m(xj_{mn})J_m(xj_{ml})dx = \frac{\delta_{nl}}{2}\left(J_m'(j_{mn})\right)^2$$

- Derivada de la función J_0

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = J_0'(x) = -J_1(x)$$

- Derivada de J_1

$$\frac{d}{dx}\left(xJ_1(x)\right) = J_0(x)$$

- $j_{01} = 2{,}40\,; J_1(j_{01}) = 0{,}52$

- El campo de presión acústica de una fuente simple situada en el origen está dado por:

$$P_s'(r) = \frac{Q_s}{4\pi r}e^{i(\omega t - kr)}$$

donde Q_s es el poder de la fuente.

- Los coeficientes de reflexión α_r y de transmisión α_t en una interfase plana entre dos medios para una onda plana que arriba con ángulo θ_i con respecto a la normal está dado por:

$$\alpha_r = \frac{Z_2\cos(\theta_i) - Z_1\cos(\theta_t)}{Z_2\cos(\theta_i) + Z_1\cos(\theta_t)}$$

$$\alpha_t = \frac{2Z_2\cos(\theta_i)}{Z_2\cos(\theta_i) + Z_1\cos(\theta_t)}$$