Ejercicio 1. Considere una membrana circular de radio a y densidad superficial de masa ρ que vibra en su modo fundamental dado por:

$$z(r,t) = AJ_0(k_{01}r)\cos(\omega_{01}t + \phi)$$

donde z representa el desplazamiento vertical de la membrana, ω_{01} es la frecuencia de vibración del modo fundamental, $k_{01} = j_{01}/a$ y $A \in \mathbb{R}$ es la amplitud en el centro de la membrana. (a) Hallar la energía mecánica total de la membrana para esta vibración. **Sugerencia:** Para la integración en la variable r realizar cambios de variables apropiados de manera de llevar la integral a la forma de la relación de ortogonalidad de las funciones de Bessel. (b) Una membrana circular de radio $a = 0{,}25$ m y densidad $\rho = 1{,}0\ kg/m^2$ se estira con una tensión $|\vec{T}| = 25{,}0 \times 10^3\ N/m$. Hallar la frecuencia del modo fundamental y su energía mecánica total.

(a) La energía cinética de un elemento de área $rdrd\theta$ de la membrana está dada por:

$$de_c = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 rdrd\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\omega_{01}AJ_0(k_{01}r)\sin(\omega_{01}t + \phi)$$

Por lo tanto, la energía cinética total de la membrana está dada por:

$$E_c = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{2}\rho(\omega_{01}AJ_0(k_{01}r)\sin(\omega_{01}t + \phi))^2 rdrd\theta$$

Como el integrando no depende del ángulo polar θ, la integral en esta variable es directa:

$$E_c = \pi\rho A^2\omega_{01}^2\sin^2(\omega_{01}t + \phi)\int_0^a rJ_0^2(k_{01}r)dr$$

Para resolver la integral en r podemos recurrir a la relación de ortogonalidad de las funciones de Bessel:

$$\int_0^1 xJ_m(xj_{mn})J_m(xj_{ml})dx = \frac{\delta_{nl}}{2}\left(J_m'(j_{mn})\right)^2$$

Para llevar la integral en r a esta forma hacemos primero el cambio de variable $x = r/a$. Así tenemos $dr = adx$ y la integral toma la forma:

$$\int_0^1 axJ_0(j_{01}x)J(j_{01}x)adx = \frac{a^2}{2}\left(J_0'(j_{01})\right)^2$$

Usando la relación $J_0' = -J_1$ llegamos a:

$$E_c = \rho\frac{\pi a^2}{2}[\omega_{01}AJ_1(j_{01})]^2\sin^2(\omega_{01}t + \phi)$$

La energía potencial de un elemento de área $rdrd\theta$ de la membrana está dado por:

$$de_p = \frac{1}{2}|\vec{T}|\left[\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2\right] r dr d\theta$$

Como el modo fundamental es independiente del ángulo polar θ tenemos:

$$de_p = \frac{1}{2}|\vec{T}|\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 r dr d\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = -Ak_{01}J_1(k_{01}r)\cos(\omega_{01}t+\phi)$$

Por lo tanto, la energía potencial total está dada por:

$$E_p = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{2}|\vec{T}|[Ak_{01}J_1(k_{01}r)\cos(\omega_{01}t+\phi)]^2 r dr d\theta$$

Nuevamente la integral en θ es directa y tenemos:

$$E_p = \pi|\vec{T}|A^2k_{01}^2\cos^2(\omega_{01}t+\phi)\int_0^a rJ_1(k_{01}r)dr$$

Notemos que para resolver la integral en r no podemos usar la relación de ortogonalidad directamente pues en el argumento de la función J_1 aparece la raíz de la función J_0. Para resolver la integral hacemos primero el mismo cambio de variable que en el caso anterior $x = r/a$.

$$\Rightarrow \int_0^a rJ_1(k_{01}r)dr = a^2\int_0^1 xJ_1(j_{01}x)dx$$

Hacemos ahora un nuevo cambio de variable $y = j_{01}x$

$$\Rightarrow \int_0^a rJ_1(k_{01}r)dr = a^2\int_0^1 xJ_1(j_{01}x)dx = \left(\frac{a}{j_{01}}\right)^2\int_0^{j_{01}} y\big(J_1(y)\big)^2 dy$$

Notemos ahora que $J_1(y) = -dJ_0/dy$ por lo que podemos escribir:

$$\int_0^a rJ_1(k_{01}r)dr == -\left(\frac{a}{j_{01}}\right)^2\int_0^{j_{01}} yJ_1(y)\frac{dJ_0(y)}{dy}dy$$

Integrando por partes tenemos:

$$-\left(\frac{a}{j_{01}}\right)^2\int_0^{j_{01}} yJ_1(y)\frac{dJ_0(y)}{dy}dy = -\left(\frac{a}{j_{01}}\right)^2\left[yJ_1(y)J_0(y)_0^{j_{01}} - \int_0^{j_{01}} yJ_0(y)J_0(y)dy\right]$$

Vemos que el primer término entre paréntesis rectos se anula al evaluar la función en los límites ya que $J_1(0) = 0$ y $J_0(j_{01}) = 0$.

$$\Rightarrow -\left(\frac{a}{j_{01}}\right)^2\int_0^{j_{01}} yJ_1(y)\frac{dJ_0(y)}{dy}dy = \left(\frac{a}{j_{01}}\right)^2\int_0^{j_{01}} y\big(J_0(y)\big)^2 dy$$

Deshaciendo ahora el cambio de variable anterior llegamos a:

$$\int_0^a r\big(J_1(k_1 r)\big)^2 dr = a^2 \int_0^1 x\big(J_0(j_{01}x)\big)^2 dx = \frac{a^2}{2}\big(J_1(j_{01})\big)^2$$

Finalmente tenemos que:

$$E_p = \frac{\pi a^2}{2}\left|\vec{T}\right|[Ak_{01}J_1(j_{01})]^2 \cos^2(\omega_{01}t + \phi)$$

Notando que $\left|\vec{T}\right| = \rho c^2$ y $c^2 k_{01}^2 = \omega_{01}^2$ llegamos finalmente a:

$$E_m = E_c + E_p = \frac{M}{2}\omega_{01}^2 A^2\big(J_1(j_{01})\big)^2$$

donde $M = \rho\pi a^2$ es la masa total de la membrana.

(b) La frecuencia del modo fundamental está dada por:

$$\omega_{01} = ck_{01} = \sqrt{\frac{\left|\vec{T}\right|}{\rho}}\frac{j_{01}}{a}$$

Sustituyendo los valores numéricos $\left|\vec{T}\right| = 25{,}0 \times 10^3\ N/m$, $a = 0{,}25$ m, $\rho = 1{,}0\ kg/m^2$ y $j_{01} = 2{,}40$ llegamos a:

$$\omega_{01} \cong 1{,}518 \times 10^3\ rad/s$$

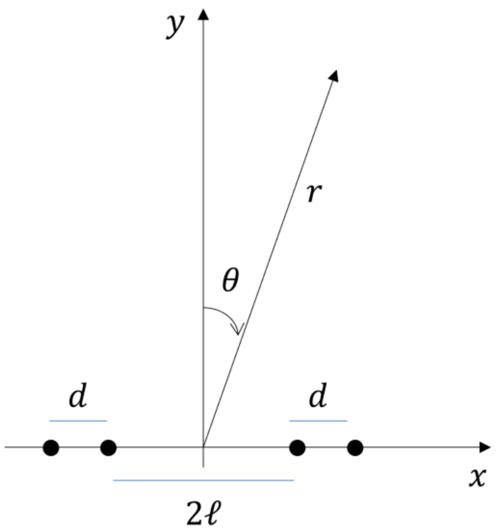
La masa total de la membrana vale:

$$M = \rho\pi a^2 \cong 0{,}20\ kg$$

Tenemos que $J_1(j_{01}) = 0{,}52$. Por lo tanto, la energía mecánica total de la membrana vale:

$$E_m = \left(\frac{0{,}2}{2}\right)(1518)^2(1 \times 10^{-3})^2(0{,}52)^2 \cong 6{,}23 \times 10^{-2}\ J$$

Ejercicio 2.



Considere el arreglo lineal de 4 fuentes simples idénticas que se muestra en la figura. Las fuentes vibran a la misma frecuencia y en fase entre sí.
(a) Mostrar que, en la aproximación de campo lejano ($r \gg \ell, d$), la presión acústica del arreglo se puede escribir como:

$$P(r,\theta) = P_s(r)H(\theta)$$

donde $P_s(r)$ es el campo acústico de una única fuente simple y $H(\theta)$ es la directividad del arreglo que deberá hallar explícitamente. (b) Si las fuentes emiten en agua ($c = 1500\ m/s$) a una frecuencia $f = 15 \times 10^3$ Hz, y $d = 1{,}5$ cm, hallar el valor de ℓ tal que el campo lejano tenga el primer nodo en $\theta = 45º$.

(a) El campo de presión acústica de una fuente simple situada en el origen está dado por:

$$P_s'(r) = \frac{Q_s}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)}$$

donde Q_s es el poder de la fuente. A partir de esta expresión, podemos ver que, para cada una de las fuentes del problema el campo acústico está dado por:

$$P_i'(r,\theta) = \frac{Q_s}{4\pi R_i} e^{i(\omega t - kR_i)}$$

donde $R_i = |\vec{R}_i|$ y

$$\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{x}_i$$

siendo $\vec{x}_i$ el vector posición de cada fuente sobre el eje horizontal. La presión acústica total en el punto de observación r, θ está dada por:

$$P'(r,\theta) = \sum_i P_i'(r,\theta) = \frac{Q_s e^{i\omega t}}{4\pi} \sum_i \frac{e^{-ikR_i}}{R_i}$$

Vamos ahora a realizar la aproximación de campo lejano. En el denominador sustituimos $R_i \approx r$ para todas las fuentes, de manera que:

$$P'(r,\theta) = \frac{Q_s e^{i\omega t}}{4\pi r} \sum_i e^{-ikR_i}$$

Para la fase utilizamos el vector posición de cada fuente:

$$x_1 = -(\ell + d)\,;\, x_2 = -\ell\,;\, x_3 = \ell\,;\, x_4 = \ell + d$$

De manera que:

$$R_1 = [r^2 + x_1^2 - 2rx_1 \cos(\alpha)]^{1/2}$$

donde $\alpha = \pi/2 + \theta$ es el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{x}_1$. De manera que podemos escribir:

$$R_1 = r\left[1 + \left(\frac{x_1}{r}\right)^2 - \frac{2x_1}{r}\sin(\theta)\right]^{1/2}$$

Utilizando ahora la aproximación de campo lejano donde $r \gg x_1$ tenemos:

$$R_1 \cong r\left[1 - \left(\frac{x_1}{r}\right)\sin(\theta)\right] = r + (\ell + d)\sin(\theta)$$

De forma análoga tenemos en la aproximación de campo lejano:

$$R_2 \cong r + \ell \sin(\theta)$$

$$R_3 \cong r - \ell \sin(\theta)$$

$$R_4 \cong r - (\ell + d)\sin(\theta)$$

De manera que:

$$P'(r,\theta) = \frac{Q_s e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r}\left[\left(e^{ik(\ell+d)\sin(\theta)} + e^{-ik(\ell+d)\sin(\theta)}\right) + \left(e^{ik\ell\sin(\theta)} + e^{-ik\ell\sin(\theta)}\right)\right]$$

$$= \frac{Q_s e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r}[2\cos(k(\ell + d)\sin(\theta)) + 2\cos(k\ell\sin(\theta))]$$

$$= P_s'(r)H(\theta)$$

(b) Para que exista un nodo en $\theta = 45º$ se debe cumplir:

$$\cos(k(\ell + d)\sin(\theta)) + \cos(k\ell\sin(\theta)) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(k\ell\sin(\theta))\,[1 + \cos(kd\sin(\theta))] = \sin(k\ell\sin(\theta))\sin(kd\sin(\theta))$$

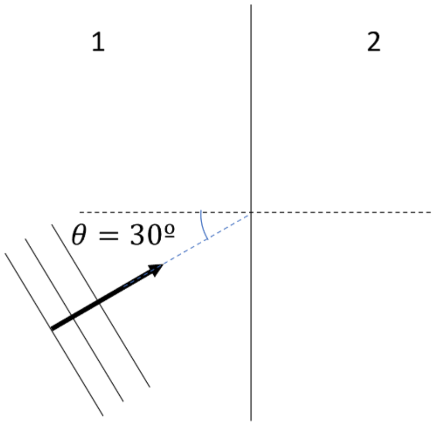
$$\tan(k\ell\sin(\theta)) = \frac{[1 + \cos(kd\sin(\theta))]}{\sin(kd\sin(\theta))}$$

Sustituyendo los valores numéricos encontramos que:

$$\frac{[1 + \cos(kd\sin(\theta))]}{\sin(kd\sin(\theta))} \cong 2{,}696$$

Por lo tanto:

$$\ell = \frac{\tan^{-1}(2{,}696)}{k\sin(\theta)} \cong 2{,}74\ cm$$



Ejercicio 3. Una onda plana de intensidad media I_i se propaga en un medio con velocidad $c_1 = 1250\ m/s$ y densidad $\rho_1 = 860\ kg/m^3$. La onda arriba a la interfase con un segundo medio formando un ángulo $\theta = 30º$ con respecto a la normal como se muestra en la figura. En el medio 2 la velocidad es $c_2 = 1500\ m/s$ y su densidad es $\rho_2 = 1000\ kg/m^3$. (a) Hallar el ángulo de refracción en el segundo medio. (b) Hallar la intensidad media de la onda reflejada y de la onda transmitida. (c) ¿Es la suma de las intensidades transmitida y reflejada igual a la intensidad incidente? Justifique el resultado obtenido.

(a) El ángulo de refracción lo obtenemos a través de la ley de Snell:

$$\frac{\sin(\theta_i)}{c_1} = \frac{\sin(\theta_t)}{c_2} \Rightarrow \theta_t = \sin^{-1}\left(\frac{c_2}{c_1}\sin(\theta_i)\right) \cong 36{,}87º$$

(b) Podemos escribir las ondas incidente P_i', reflejada P_r' y transmitida P_t' como:

$$P_i' = Ae^{i(\omega t - k_1 x cos(\theta_i) - k_1 y \sin(\theta_i))}$$

$$P_r' = Be^{i(\omega t + k_1 x cos(\theta_i) - k_1 y \sin(\theta_i))}$$

$$P_t' = Ce^{i(\omega t - k_2 x cos(\theta_t) - k_2 y \sin(\theta_t))}$$

Tenemos que

$$\alpha_r = \left(\frac{B}{A}\right) = \frac{Z_2\cos(\theta_i) - Z_1\cos(\theta_t)}{Z_2\cos(\theta_i) + Z_1\cos(\theta_t)}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$Z_2 = \rho_2 c_2 = 1{,}5 \times 10^6\ Rayls\ ; \cos(\theta_i) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_1 = \rho_1 c_1 = 1{,}075 \times 10^6 Rayls\ ; \cos(\theta_t) = 0{,}8$$

llegamos a:

$$\alpha_r \cong 0{,}203 \Rightarrow B = 0{,}203A$$

La intensidad media de la onda reflejada está dada por:

$$I_r = \frac{B^2}{2Z_1} = \frac{(0{,}203)^2 A^2}{2Z_1} = (0{,}203)^2 I_i$$

Por otro lado temenos:

$$\alpha_t = \frac{C}{A} = \frac{2Z_2\cos(\theta_i)}{Z_2\cos(\theta_i) + Z_1\cos(\theta_t)}$$

Sustituyendo los valores numéricos llegamos a:

$$\alpha_t = 1{,}203 \Rightarrow C = 1{,}203A$$

La intensidad de la onda transmitida está dada por:

$$I_t = \frac{C}{2Z_2} = \frac{(1{,}203)^2 A^2}{2Z_2} = (1{,}203)^2 \frac{Z_1}{Z_2} I_i$$

Temenos

$$\frac{Z_1}{Z_2} \cong 0{,}7167$$

Y por lo tanto:

$$I_r + I_t = [(0{,}203)^2 + 0{,}7167(1{,}203)^2] I_i \cong 1{,}08 I_i > I_i$$

La intesidad no es una cantidad que se conserva pues depende de como se distribuye la potencia sobre el área normal a la interfase. Lo que sí se debe conservar es la potencia de la onda incidente.