Ejercicio 6.

(a) La solución general para una cuerda infinita condiciones iniciales está dada por la solución de D'Alambert:

$$y(x,t)=\frac{1}{2}\left[\phi(x-ct)+\phi(x+ct)+\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{x+ct}\psi(\delta)d\delta-\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{x-ct}\psi(\delta)d\delta\right]$$

En este caso tenemos $\phi(x)=0$; $\psi(\delta)=(a^2-\delta^2)[H(\delta+a)-H(\delta-a)]$, donde $H(\delta)$ es la función de Heaviside. Consideremos el instante $t=0$. Por lo tanto:

$$y(x,0)=\frac{1}{2c}\left[\int_{-\infty}^{x}(a^2-\delta^2)[H(\delta+a)-H(\delta-a)]d\delta\right.$$
$$\left.-\int_{-\infty}^{x}(a^2-\delta^2)[H(\delta+a)-H(\delta-a)]d\delta\right]$$

$$\Rightarrow I(x)=\int_{-\infty}^{x}(a^2-\delta^2)[H(\delta+a)-H(\delta-a)]d\delta=\begin{cases}0\ si x<-a\\ x\left(a^2-\frac{x^2}{3}\right)+\frac{2a^3}{3}\quad si-a<x<a\\ \frac{4a^3}{3}\quad si\ x>a\end{cases}$$

La figura 6.1 muestra gráficamente la función ψ y su integral $I(x)$ usando el valor numérico $a=2$ como ejemplo. De manera que en $t=0$ tenemos

$$y(x,0)=\frac{1}{2c}[I(x)-I(x)]=0$$

Para $t>0$ tenemos que la primera de estas integrales se desplaza hacia la derecha una cantidad ct y la segunda se desplaza hacia la izquierda la misma cantidad. El resultado es:

$$y(x,t)=\frac{1}{2c}[I(x+ct)-I(x-ct)]$$

Esto se muestra en la figura 6.2. En azul se muestra $I(x+ct)$ para $t=0$ y 3 tiempos posteriores arbitrarios, en rojo se muestra $-I(x-ct)$ para los mismos tiempos y en negro la suma de estas dos funciones dividido entre $2c$ lo que es igual a $y(x,t)$

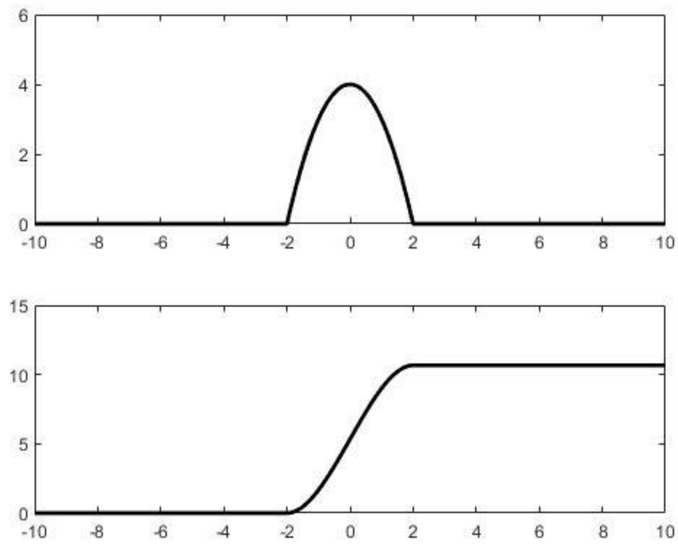

Figura 6.1. Representación gráfica de la función $\psi(\delta)$ y de su integral $I(x)$

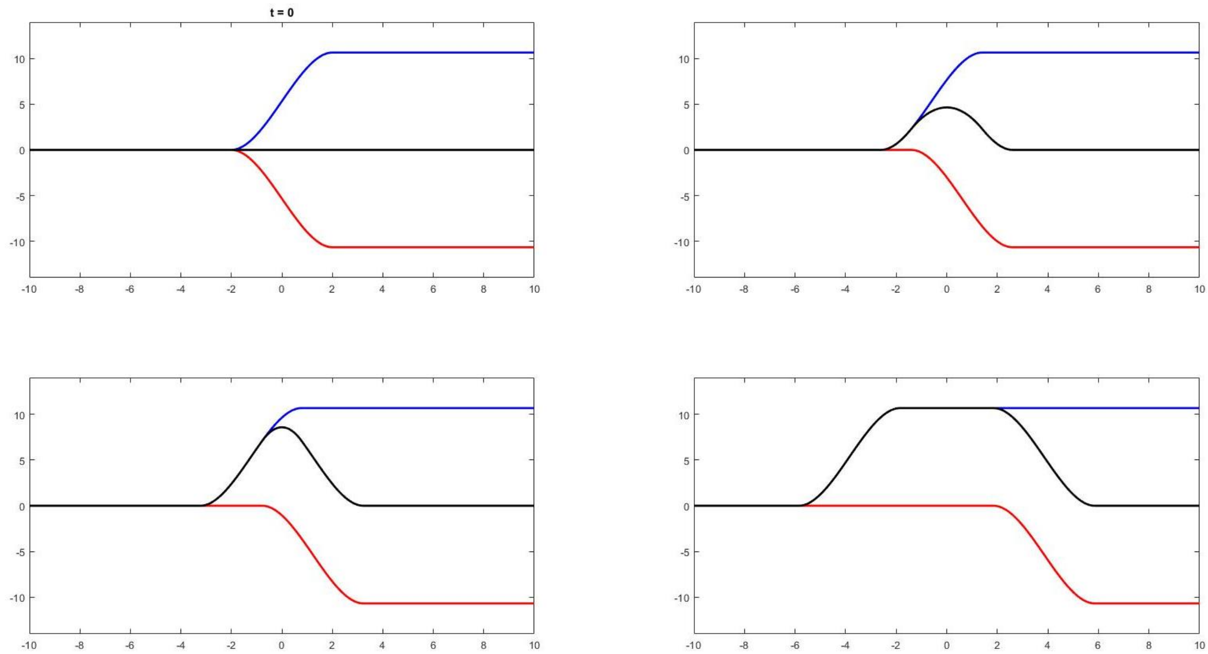

Figura 6.2. Representación gráfica de las integrales $I(x+ct)$ (azul) $-I(x-ct)$ (rojo) y su suma (negro) para $t=0$ y tres instantes posteriores arbitrarios.

(b) Si ahora los extremos en $\pm a$ son fijos, debemos expresar la condición inicial como combinación lineal de modos normales de vibración. Debemos tener en cuenta que para hacer la extensión impar de $\psi(x)$ debemos trasladar el origen de la coordenada espacial a $x=-a$. Para ello definimos $\zeta = x + a \Rightarrow d\zeta = dx$. De esta forma tenemos:

$$y(\zeta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sin(nk_1\zeta)[\alpha_n\cos(n\omega_1 t)+\beta_n\sin(n\omega_1 t)]$$

donde $k_1=\pi/2a$ y $\omega_1=ck_1$. En $t=0$ tenemos $y(\zeta,0)=0\,;\,\partial y(\zeta,0)/\partial t\ =\psi(\zeta)$. Como consecuencia $\alpha_n=0\ \forall\ n$. Por otro lado:

$$\psi(\zeta)=(a^2-(\zeta-a)^2)=\zeta(2a-\zeta)$$

Por lo tanto:

$$\beta_n=\frac{1}{n\omega_1 a}\int_0^{2a}\zeta(2a-\zeta)\sin(nk_1\zeta)\,d\zeta$$

$$=\frac{1}{n\omega_1 a}\left\{2a\int_0^{2a}\zeta\sin(nk_1\zeta)\,d\zeta-\int_0^{2a}\zeta^2\sin(nk_1\zeta)\,d\zeta\right\}$$

Integrando por partes ambas integrales llegamos a:

$$\beta_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n\omega_1}\dfrac{16a^2}{(n\pi)^3} & si\ n\ es\ impar\\ 0 & si\ n\ es\ par\end{cases}$$

Finalmente, deshaciendo el cambio de variable tenemos:

$$y(x,t)=\frac{16a^2}{\pi^3\omega_1}\sum_{n\ impar}\frac{\sin\big(nk_1(x+a)\big)\sin(n\omega_1 t)}{n^4}$$