Movimiento Browniano

Curso de física moderna 2022

José Furtado

Facultad de Ciencias
Universidad de la República

7 de abril de 2022

Tabla de contenidos

FACULTAD DE CIENCIAS
UDELAR fcien.edu.uy

Origen

Alrededor de 1828, un botánico escocés llamado Robert Brown observó que el movimiento de unas partículas contenidas en el pólen (principalmente amiloplastos) suspendidas en agua tenían un movimiento aleatorio. Aunque desde la invensión del microscopio este fenómeno fue visto antes, él fue el primero en prestarle atención y por eso se le llama en su honor, movimiento Browniano.

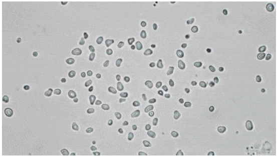
Ochenta años después, en 1908, Jean Perrin usó el movimiento Browniano para determinar el número de Avogadro, basado en la analogía entre las partículas suspendidas en el líquido y las moléculas en la atmósfera. La teoría correspondiente había sido publicada por Albert Einstein y Marian Ritter von Smoluchowski en 1905. Luego del trabajo de Perrin ya nadie cuestionó la existencia de los átomos.

[Gratton, 2000]

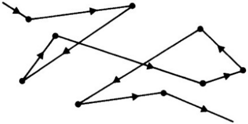
FACULTAD DE CIENCIAS UDELAR fcien.edu.uy

El fenómeno físico

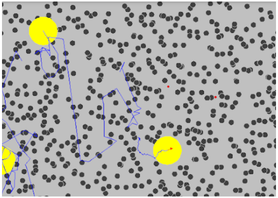
Se le llama movimiento browniano al movimiento aleatorio observado en las partículas suspendidas en un medio fluido (líquido o gas). Esto es causado por colisiones aleatorias con las moléculas que componen dicho fluido.



(a) Los amiloplastos son lo suficientemente pequeños para verse afectados por este fenómeno



(b) Dibujo esquemático de la observación de la trayectoria de una partícula suspendida en un líquido.



(c) Trayectoria simulada de movimiento browniano

[Feynman, 1963]

La caminata aleatoria

En su versión más simple, imaginamos un "juego" en que un "jugador" parte del punto $x = 0$, y en cada "movimiento" se requiere que dé un paso, ya sea hacia adelante ($+x$) o hacia atrás ($-x$). La elección debe hacerse al azar, determinada, por ejemplo, por el lanzamiento de una moneda. ¿Cómo describiremos el movimiento resultante? Podemos caracterizar el progreso del caminante por la distancia neta D_N recorrida en N pasos.

Como es igualmente probable ir hacia adelante o hacia atrás, esperaríamos que su promedio sea cero. Pero tenemos la impresión de que al crecer N, es más probable que se haya apartado del punto de partida. Por eso tomamos el valor absoluto, el promedio del $|D|$. Pero es más conveniente tomar el cuadrado de la distancia: D^2. Dejando de lado el desarrollo matemático, la distancia de traslación cuadrática media después de N pasos es $D_{cm} = \sqrt{D^2} = \sqrt{N}$, este resultado lo veremos más adelante.

[Feynman, 1963]

Planteamiento

Las partículas, cuyo tamaño suele ser de $10^{-4} cm$, son mucho más masivas que las moléculas y no se mueven tan lejos ni tan rápido como éstas. De hecho, si están en equilibrio con el líquido a la temperatura T, entonces la energía cinética media es,

$$\frac{1}{2}M\langle v^2\rangle = \frac{1}{2}M\langle v_m^2\rangle = \frac{3}{2}kT \tag{1}$$

donde M es la masa de la partícula, entonces

$$\left\langle v^2 \right\rangle = \frac{m_{molec}}{M} \left\langle v^2 \right\rangle_{molec}$$

Las partículas pueden observarse con un microscopio y su desplazamiento cuadrático medio puede ser medido. Las predicciones teóricas se derivan de la escritura de la ecuación del movimiento de las partículas.

[Gasiorowicz, 1979]

Fuerzas sobre la partícula

Las fuerzas consisten en dos, una fuerza viscosa (F_α), que es una fuerza de fricción de la forma $-\alpha v$, donde, por la *ley de Stokes*

$$\alpha = 6\pi a\eta \longrightarrow F_\alpha = -6\pi a\eta v \quad (2)$$

Siendo a el radio de la partícula y η la viscosidad del líquido. Y otra fuerza aleatoria $F(t)$ debida a la interacción impulsiva con las moléculas del fluido. Así, tenemos:

$$F_{neta} = ma \longrightarrow M\frac{d^2r}{dt^2} = -\alpha\frac{dr}{dt} + F(t) \quad (3)$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de Langevin* y describe aproximadamente el movimiento.

[Gasiorowicz, 1979]

Se multiplica la ecuación anterior (3) por r:

$$Mr \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} = -\alpha r \frac{dr}{dt} + rF(t) \tag{4}$$

Y por la siguiente propiedad,

$$\frac{d}{dt}\left(r \cdot \frac{dr}{dt}\right) = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} \tag{5}$$

Nos quedaría:

$$Mr \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} = M\frac{d}{dt}\left(r \cdot \frac{dr}{dt}\right) - M\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \tag{6}$$

[Gasiorowicz, 1979]

FACULTAD DE CIENCIAS
UDELAR fcien.edu.uy

Desarrollo

Como la fuerza es aleatoria y no está relacionada con la posición de la partícula, en el lado derecho de la ecuación

$$\langle r \cdot F(t) \rangle = 0 \tag{7}$$

Por lo tanto:

$$M \frac{d}{dt} \left\langle r \cdot \frac{dr}{dt} \right\rangle - M \left\langle \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right\rangle = -\alpha \left\langle r \cdot \frac{dr}{dt} \right\rangle + \langle r \cdot F(t) \rangle$$

Obtenemos así la ecuación:

$$M \frac{d}{dt} \left\langle r \cdot \frac{dr}{dt} \right\rangle = -\alpha \left\langle r \cdot \frac{dr}{dt} \right\rangle + M \left\langle \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right\rangle + 0 \tag{8}$$

[Gasiorowicz, 1979]

y como en equilibrio a la temperatura T,

$$E_k = \frac{1}{2} M \left\langle \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right\rangle = \frac{3}{2} kT \longrightarrow \langle v^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right\rangle = \frac{3kT}{M}$$

dividiendo por M, obtenemos la ecuación:

$$\frac{d}{dt} \left\langle r \cdot \frac{dr}{dt} \right\rangle = -\frac{\alpha}{M} \left\langle r \cdot \frac{dr}{dt} \right\rangle + \frac{3kT}{M} \tag{9}$$

Se trata de una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{df}{dt} = -\gamma f + C \tag{10}$$

Para resolverla se introduce otra función $g(t)$ de la forma:

$$f(t) = \frac{C}{\gamma} + g(t) \tag{11}$$

FACULTAD DE CIENCIAS UDELAR fcien.edu.uy con la constante elegida de forma que la ecuación de $g(t)$ sea simplemente

$$\frac{dg}{dt} = -\gamma g \tag{12}$$

Conocemos la solución de esta ecuación, que es:

$$g(t) = Ae^{-\gamma t} \tag{13}$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\left\langle r \cdot \frac{dr}{dt} \right\rangle = Ae^{-\alpha t/M} + \frac{3kT}{\alpha} \tag{14}$$

con la constante A a determinar por las condiciones iniciales.

[Gasiorowicz, 1979]

Desarrollo

Ahora,

$$\left\langle r \cdot \frac{dr}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle r^2 \rangle \tag{15}$$

de modo que:

$$\frac{d}{dr}\langle r^2 \rangle = 2Ae^{-\alpha t/M} + \frac{6kT}{\alpha} \tag{16}$$

Para hallar el valor de $\langle r^2 \rangle$, integramos:

$$\langle r^2 \rangle = \int 2\left\langle r \cdot \frac{dr}{dt} \right\rangle dt = \int \left(2Ae^{-\alpha t/M} + \frac{6kT}{\alpha} \right) dt \tag{17}$$

[Gasiorowicz, 1979]

dando como resultado:

$$\langle r^2 \rangle = -\frac{2MA}{\alpha} e^{-\alpha t/M} + \frac{6kT}{\alpha} t + B \tag{18}$$

donde B es una constante de integración. Después de un largo tiempo, es decir, cuando $t \to \infty$

$$\langle r^2 \rangle \to \frac{6k_B T}{\alpha} t \tag{19}$$

Siendo este resultado, muy similar al de la caminata aleatoria. La distancia media cuadrática recorrida es proporcional a $\sqrt{t}$. La medición de $\langle r^2 \rangle$ permite conocer $k_B = R/N_A$ y, por tanto, el número de Avogadro.

$*$ La primera buena determinación de N_A fue realizada por Perrin en 1911 utilizando este método.

FACULTAD DE CIENCIAS
UDELAR | fcien.edu.uy

Referencias I

Feynman, R. (1963).
The feynman lectures on physics vol i.
pages 1–16, 41–1, California Institute of Technology, New York. Addison Wesley Longman.

Gasiorowicz, S. (1979).
The structure of matter: A survey of modern physics.
pages 76–77, 110–113, University of Minnesota. Addison-Wesley series in physics.

Gratton, J. (2000).
Introducción a la mecánica cuántica.
page 6, Buenos Aires. Butterworths Scientific Publications.

Referencias II

Crédito plantilla de Latex: Sherif Saad, Windsor University.

Wikipedia: Equipartition theorem.

Recomendaciones:
-Video de Sixty Symbols, "Fuerza aleatoria y movimiento browniano"
-Video de Institute of Physics, "Illustrating the movement of particles in Brownian motion"
-Ver sobre caminata aleatoria en Gasiorowicz, páginas 76, 77, 78, (versión más simple y resumida en las notas de Feynman vol. 1, páginas 7 y 8, capítulo 6).

(Lo que está en verde, son enlaces).