PRÁCTICO Nº 4
Ondas de materia. Principio de incertidumbre. Ecuación de Schrödinger. Valores de expectación.

1.- Calcule la longitud de onda de de Broglie para:
a) Una bala de 40g que viaja a 1000 m/s
b) Un electrón en un televisor de tubo que es acelerado por una diferencia de potencial de 10 kV
c) Una partícula α, en un experimento de Rutherford, con energía típica de 6 MeV.

2.- Imaginemos un mundo en el que la constate de Planck vale h=6,6 x 10^{-3} Js (en vez de 6,6 x 10^{-34} Js). En este mundo imaginario, se lanzan esferas de 66 g con velocidad de 5,0 m/s hacia el interior de una casa, a través de dos ventanas paralelas, altas y angostas, separadas a una distancia de 0,6 m. Calcule la separación entre las franjas de difracción que se formarían sobre una pared situada a 12 m detrás de las ventanas.

3.- Uno de los cuerpos más grandes en los que se ha logrado observar el comportamiento ondulatorio de la materia es el Fulereno C_{60} (una "pelota de fútbol" de radio 0,5 nm y masa $1{,}2\times10^{-24}$ kg). En un experimento de difracción se lanzan fulerenos a una velocidad de 200 m/s a través de una rejilla con un espaciado de 100 nm.

a) Calcule la longitud de onda del Fulereno en el experimento
b) Si la pantalla donde se registran los fulerenos está a 1,2 m de la rejilla, muestre que la separación entre las franjas de difracción es de 34 μm.
Más información del experimento: Am. J. Phys., Vol. 71, No. 4, April 2003 (de ahí se tomó la figura)

4.- (5.17 SMM) La relación de dispersión para ondas de electrones relativistas es

$$\omega(k) = \sqrt{c^2k^2 + (m_e c^2/\hbar)^2}$$

a) Obtenga expresiones para las velocidades de fase v_f y de grupo v_g
b) Muestre que el producto $v_f \cdot v_g$ es constante. Si $v_f>c$, ¿qué puede concluir sobre v_g?

5.- (Ejemplo 3-7 ER) Considere una partícula microscópica que se mueve libremente a lo largo del eje x. Suponga que en el instante t=0 se localiza la partícula con una incertidumbre Δx_0. Calcule la incertidumbre en la posición de la partícula a un tiempo t posterior.

6.- (Ejemplo 5.10 SMM) Un átomo puede radiar en cualquier momento después de ser excitado. En un caso típico, se encuentra que la vida media de un átomo excitado es de 10^{-8} s.

a) Use el principio de incertidumbre para calcular el ancho Δf de la línea de emisión correspondiente.

b) Si la longitud de onda de la línea espectral es de 500nm, calcule el ensanchamiento fraccional $\Delta f/f$

7.- (Ejemplo 5-2 ER) Verificar que la ecuación de Schrödinger es lineal, es decir que si $\psi_1(x,t)$ y $\psi_2(x,t)$ satisfacen la ecuación entonces $\psi(x,t) = a\,\psi_1(x,t) + b\,\psi_2(x,t)$ también la satisface, donde a y b son constantes arbitrarias.

8.- (Ejemplo 5-3 ER) La función de onda $\psi(x,t)$ para el estado de energía más bajo de un oscilador armónico de masa m y constante de fuerza C se puede expresar como:

$$\Psi(x,t) = Ae^{-(\sqrt{Cm}/2\hbar)x^2}e^{-(i/2)\sqrt{C/m}\,t}$$

con A una constante de normalización. Verificar que esta expresión es una solución de la ecuación de Schrödinger para el potencial apropiado.

9.- El flujo de probabilidad $j(x,t)$ asociado a una función de onda $\psi(x,t)$ se define como:

$$j(x,t) = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) - \psi(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,t)\right)$$

a) Demuestre a partir de la ecuación de Schrödinger que $\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*(x,t)\psi(x,t)\right) = -\partial_x j(x,t)$.

b) Use el resultado en a) para probar que $\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x,t)\psi(x,t)dx$ es constante en el tiempo. ¿Qué significa esta propiedad?

***10.-** Considere la función de onda $\psi(x,t) = A\left(1+2i\hbar Bt/m\right)^{-1/2}e^{-Bx^2/(1+2i\hbar Bt/m)}$ donde A y B son constantes.

a) Muestre que ψ satisface la ecuación de Schrödinger de una partícula libre de masa m.

b) Muestre que si $A=(2B/\pi)^{1/4}$ el producto $\psi(x,t)^*\,\psi(x,t)$ se puede escribir de la forma

$$\psi^*(x,t)\psi(x,t) = \sqrt{\frac{a(t)}{\pi}}e^{-a(t)x^2} \qquad \text{donde} \qquad a(t) = \frac{2B}{1+4\hbar^2B^2t^2/m^2}$$

c) Halle los valores esperados de x, x^2, p y p^2 para el estado ψ

d) Calcule Δx y Δp y verifique que su producto satisface el principio de incertidumbre.

e) Muestre que para t largos la expresión de Δx coincide con la hallada en el problema 6 del práctico 6.

Algunas integrales que pueden aparecer en los problemas:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$