PRÁCTICO Nº6 (2022)
Átomos con un electrón. Momento angular.

1.- Verifique las siguientes expresiones:

a)

$$[L_x, x] = 0 \quad , \quad [L_x, p_x] = 0$$
$$[L_x, y] = i\hbar z \quad , \quad [L_x, p_y] = i\hbar p_z$$
$$[L_x, z] = -i\hbar y \quad , \quad [L_x, p_z] = -i\hbar p_y$$

b) A partir de las relaciones de a) pruebe que los conmutadores de las componentes del momento angular estan dados por:

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad , \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x \quad , \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

c) $$[\boldsymbol{L}^2, \boldsymbol{L}] = 0 \qquad [\boldsymbol{L}, \boldsymbol{p}^2] = 0$$

d) $$\boldsymbol{L}^2 = r^2\boldsymbol{p}^2 + \hbar^2 r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2\hbar^2 r \frac{\partial}{\partial r} = r^2 p^2 + \hbar^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right)$$

2.- La función de onda normalizada del estado base para el electrón en el átomo de hidrógeno es:

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0}$$

, donde r es la coordenada radial del electrón y a_0 el radio de Bohr.

a) Muestre que la función de onda está normalizada

b) Muestre que la probabilidad de encontrar al electrón entre r y r+dr está dada por

$P(r)dr=|\Psi(r)|^2 4\pi r^2 dr$

c) Grafique ψ en función de r

d) Grafique P(r) en función de r y encuentre el radio donde P(r) es máxima

e) Calcule el valor de expectación <r> y compárelo con el radio obtenido en d).

3.- Demuestre que la distancia más probable desde el origen de un electrón en el estado $n = 2$, $\ell = 1$ es $4a_0$.

4.- (ER 7.10) Muestre que $R(r) = r^\ell$ satisface, en el límite $r \to 0$, la ecuación de Schrödinger radial

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) + \frac{2\mu}{\hbar^2}[E - V(r)]R = l(l+1)\frac{R}{r^2}$$

(pista: ignore términos que en este límite se vuelven despreciables respecto a otros).

5.- (ER 7.12) Considere un estado del átomo de hidrógeno con ℓ=2 y m=0

a) Realice un diagrama polar de la dependencia direccional de la distribución de probabilidad

b) ¿A qué ángulos la densidad angular de probablidad es mínima?

c) ¿A qué ángulos la densidad angular de probabilidad tiene ¼ de su valor máximo?

6.- Para un estado con ℓ=1 y m=0 calcule:

a) Los valores de expectación $<L_x>$,$<L_y>$, y $<L_z>$

c) Los valores de expectación $<L_x^2>$, $<L_y^2>$ y $<L_z^2>$

b) El valor de expectación $<L^2>$

7.- (Ejemplo 8-2 ER) Un haz de átomos de hidrógeno, emitidos desde un horno a temperatura T=400K, atraviesa un imán de Stern-Gerlach de largo X=1m y gradiente magnético de 10 T/m. Calcule la deflexión transversal de un átomo típico en cada componente del haz, debida a la fuerza ejercida sobre su momento magnético de spin, en el punto en que el haz abandona el imán.

8.- (Ejemplo 8-3 ER) Estime la magnitud de la energía de interacción spin-orbita para el estado n=2, ℓ=1 del átomo de hidrógeno. Verifique que es del mismo orden de magnitud que el desdoblamiento de estructura fina observado en el nivel de energía correspondiente.

9.- (ER 8.5) Si se coloca un átomo de hidrógeno en un campo magnético que es muy intenso comparado con el campo interno, los momentos magnéticos orbitales y de spin precesan de manera independiente y sus energías dependen de los números cuánticos m_ℓ y m_s, los cuales especifican sus componentes a lo largo de la dirección del campo externo.

Evaluar el desdoblamiento de los niveles de energía de acuerdo a los valores de m_ℓ y m_s.

Hacer el esquema de los niveles desdoblados (subniveles) que se originan por el nivel n=2, enumerando los números cuánticos.

energía entre los niveles n=2 más separados, que fuera igual a la diferencia entre las energías de los niveles n=2 y n=1 en ausencia del campo.

10.- A partir de la expresión **J=L+S** para el momento angular total de un electrón, obtenga una expresión para el producto escalar **L·S** en términos de *j, ℓ y s.*

11.- La cantidad de estados posibles de un electrón con n y ℓ dados puede enumerarse a partir de los números cuánticos (m_ℓ, m_s), o a partir de los números cuánticos (j,m_j). Verifique que en ambos casos se obtiene 4ℓ+2 estados posibles.