PROCESOS DE MEDICIÓN Y TRATAMIENTOS DE DATOS

INCERTIDUMBRE DE LA MEDICIÓN: TEORÍA Y PRÁCTICA

El resultado de una medición no está completo si no posee una declaración de la incertidumbre de la medición con un nivel de confianza determinado. De ningún modo es la incertidumbre de la medición un término equivalente al error de la medición o a la precisión de la misma bajo condiciones de repetibilidad o reproducibilidad.

La incertidumbre de la medición en ocasiones es calificada como *un gran problema*, verdaderamente no lo es y no existe situación real alguna donde lo sea, simplemente que su cálculo juzga por sí mismo cuánto conocemos de los procesos de medición en los que nos desempeñamos día a día, el nivel de la gestión de la calidad de los mismos. El análisis puede llevarnos a evaluar la calidad de las mediciones.

Desde el punto de vista más elemental, la medición es un proceso que tiene por objetivo determinar el valor de una magnitud particular, es decir del ***mensurando***, siguiendo una serie de operaciones bien definidas, las cuales deben estar documentadas. Este proceso incluye el acto en sí de medir para la adquisición de los datos, el procesamiento de los mismos y la expresión del resultado final.

Siempre que se realiza una medición inevitablemente se cometen errores debido a muchas causas, algunas pueden ser controladas y otras son incontrolables o inclusive desconocidas. Por lo tanto, para realizar mediciones con calidad y obtener resultados confiables es necesario que la persona que realiza la medición tenga el conocimiento, la técnica y la disciplina necesarios. La técnica, adquirida con el hábito de medir, conlleva a la implementación de la experiencia y al desarrollo de habilidades, insustituibles para realizar buenas mediciones. La disciplina que sólo se consigue pensando antes de hacer, sobre la base de procedimientos normalizados, realizando las operaciones ordenadamente y registrando correctamente los resultados.

Cuando se expresa el resultado de la medición, además del valor estimado del mensurando, es necesario evaluar y expresar la incertidumbre de la medición como valoración de la calidad del resultado de la medición. La incertidumbre de la medición es considerada como una figura de mérito, es decir, un índice de calidad de la medición que proporciona una base para la comparación de los resultados de las mediciones, dando una medida de la confiabilidad en los resultados.

La mayoría de las mediciones son realizadas con instrumentos sujetos a la calibración o verificación periódica. Si se conoce que estos instrumentos están en conformidad con los errores máximos permisibles establecidos en sus especificaciones o en documentos normativos aplicados y que las diferentes fuentes de incertidumbre que intervienen en el proceso de medición pueden ser cuantificadas o minimizadas, la incertidumbre asociada con el resultado de la medición puede ser calculada para la totalidad de las situaciones prácticas.

FUNDAMENTOS DE LA MEDICIÓN

1. FUNDAMENTOS

Una magnitud física es un atributo de un cuerpo, un fenómeno o sustancia, susceptible de ser medido de forma directa o indirecta. Ejemplos de magnitudes son la longitud, la masa, la potencia, la velocidad, etc.

En general, el resultado de una medición es sólo una aproximación o estimación del valor del objeto de medida. Esto se debe a las limitaciones propias del proceso de medición. Estas imperfecciones dan lugar a un error que conlleva a una incertidumbre en el resultado de la medición. Lo que se procura en toda medición es conocer las cotas o límites probabilísticos de estas incertidumbres.

1.1. LA MEDICIÓN

El objetivo de una **medición** es determinar el valor de la magnitud específica a medir, denominada **mensurando**. El mensurando es la magnitud particular sujeta a medición. Durante la realización de una medición intervienen una serie de factores que determinan su resultado:

- El objeto de medición;
- El procedimiento de medición;
- Los instrumentos de medición;
- El ambiente de medición;
- El observador;
- El método de cálculo.

Además del propio mensurando, el resultado de la medición está afectado por las denominadas **magnitudes de influencia**.

> ¿Qué son las magnitudes de influencia?
>
> Son aquellas magnitudes que no constituyen el objeto de la medición (no son el mensurando), pero tienen un efecto sobre el resultado de medida. Por ejemplo, la temperatura de un micrómetro, o la presión, la humedad reinante en un recinto donde se están efectuando mediciones de distancias mediante un sistema interferométrico láser, fluctuaciones breves de los instrumentos de medición, etc.
>
> Cuando las magnitudes de influencia se sitúan en un intervalo alrededor de determinados valores de referencia, entonces se dice que están bajo control. Por ejemplo, un laboratorio que se mantenga a una temperatura de (20 ± 0,5)ºC, mantiene bajo control la influencia de la temperatura sobre el tipo de mediciones que realiza, aunque se desconozca el valor concreto en un instante o localización determinada.

Una medición comienza con una especificación apropiada del mensurando, del método de medición y de los procedimientos de medición.

El **método de medición** es la secuencia lógica de operaciones, generalmente descritas, usada en la ejecución de las mediciones de acuerdo con un principio de medición determinado. Entre ellos podemos mencionar: el método de sustitución, el método diferencial, el método de cero, etc.

El **procedimiento de medición** es el conjunto de operaciones, descritas de forma específica, utilizadas en la ejecución de mediciones particulares, de acuerdo a un método de medición determinado. El procedimiento de medición se registra en un documento y contiene un nivel suficiente de detalle, que le permite a un operador realizar la medición sin información adicional.

El **principio de medición** es el fundamento científico del método de medición. Por ejemplo, el efecto de la dilatación de un cuerpo para la medición de la temperatura.

Cuando hacemos referencia a repetir una medición bajo las mismas condiciones (**condiciones de repetibilidad**), esto significa que ninguno de los factores que intervienen en la medición cambian, es decir:

- El mismo mensurando;
- El mismo observador;
- El mismo instrumento de medición, utilizado bajo las mismas condiciones;
- El mismo lugar;
- La repetición de la medición en un corto intervalo de tiempo.

La **repetibilidad de los resultados de las mediciones** caracteriza el acuerdo más cercano entre los resultados de mediciones sucesivas del mismo mensurando llevadas a cabo bajo condiciones de repetibilidad.

> Repetibilidad
>
> La repetibilidad mide la consistencia entre medidas repetidas de un mismo mensurando. Para valorar el grado de repetibilidad de una determinada medición, se debe debe medir el mensurando al menos dos veces. La segunda medición, evidentemente, debe realizarse sin recordar ni comprobar cual era el valor obtenido en la primera medición.
>
> La repetibilidad de un instrumento especifica la habilidad del instrumento para entregar la misma lectura en aplicaciones repetidas del mismo valor de la variable medida.

Cuando las mediciones se repiten bajo distintas condiciones, se habla entonces de su **reproducibilidad**. Las distintas condiciones pueden incluir:

- El principio de medición o el método de medición;
- El observador;
- El instrumento de medición;
- El patrón de referencia;
- La ubicación;
- Las condiciones de uso;
- El tiempo.

La **reproducibilidad de las mediciones** caracteriza el acuerdo entre los resultados de mediciones del mismo mensurando llevadas a cabo bajo condiciones de reproducibilidad.

> Reproducibilidad
> La reproducibilidad se refiere a la capacidad que tenga una prueba o experimento de ser reproducido o replicado por otros laboratorios.

Para caracterizar cualitativamente la calidad de una medición se utiliza el término **exactitud**. La exactitud de la medición es la cualidad que refleja el grado de concordancia entre el resultado de la medición y un valor verdadero del mensurando. Se recomienda no utilizar el término precisión en lugar de exactitud.

La precisión caracteriza el grado de concordancia entre resultados de ensayos independientes, obtenidos bajo idénticas condiciones.

> ¿Hay alguna diferencia entre ***exactitud*** y ***precisión***?
>
> Sí, existe una gran diferencia. Aunque en el lenguaje coloquial, ambos términos son sinónimos, sin embargo, los términos exactitud y precisión, aunque relacionados entre sí, no deben intercambiarse, ya que la diferencia entre ambos es significativa.
>
> ***Exactitud***: Proximidad entre un valor medido y un valor verdadero del mensurando.
>
> ***Precisión***: Proximidad entre los valores medidos obtenidos en mediciones repetidas de un mismo objeto bajo condiciones de repetibilidad.
>
> El concepto de exactitud se refiere a la capacidad de obtener valores próximos al valor verdadero de la magnitud medida. Por tanto, una medición, o el resultado, será más exacto cuanto menor sea la diferencia entre el valor medido y el valor “convencionalmente verdadero” de la magnitud.
>
> La idea de precisión refleja la capacidad de obtener valores próximos entre sí al efectuar mediciones repetidas. Una medición, o el resultado, será pues más preciso cuanto menor sea la dispersión que presentan entre sí los sucesivos resultados obtenidos.

Exacto y preciso	Exacto, pero no preciso	Preciso, pero no exacto	Ni preciso ni exacto
Resultados muy próximos entre sí, con un valor medio muy cercano al valor verdadero.	Valor medio muy cercano al valor verdadero, pero gran dispersión de los resultados.	Resultados muy próximos entre sí pero valor medio alejado del valor verdadero.	Gran dispersión de los resultados en torno al valor medio y alejado del valor verdadero.

1.2. INSTRUMENTO DE MEDICIÓN

Se denomina instrumento o aparato de medida a todo dispositivo destinado a realizar una medición, sólo o con dispositivos suplementarios.

Independientemente de sus diseños, principios de funcionamiento y magnitudes que miden, a los instrumentos de medición les son comunes una serie de características, entre las que se encuentran:

- ***Rango de indicación***: Conjunto de los valores limitados por las indicaciones extremas del instrumento de medición. El rango es normalmente expresado en términos de sus límites inferior y superior.

  Por ejemplo, para un termómetro el rango de medición es de (50 a 200) °C. se llama **intervalo de medición** al módulo de la diferencia entre los dos límites del rango (150°C en el ejemplo anterior)

- ***Valor nominal***: Valor redondeado o aproximado de una característica de un instrumento de medición. Es el valor otorgado por el instrumento en un proceso de medición.

Por ejemplo:

- o El valor 10 g para una pesa;
- o El valor 0,1 mol/L de la concentración en cantidad de sustancia de una solución de ácido clorhídrico, HCL;
- o El valor 20 mL para una pipeta;
- o El valor 25 ºC para el punto de control de un baño termostático

- ***Valor de división o Apreciación***: Diferencia entre los valores correspondientes a dos marcas sucesivas de la escala.

  Por ejemplo, 1 A para el amperímetro de la figura.

- ***Resolución*** (de un dispositivo indicador): Menor diferencia entre indicaciones (o divisiones) de un dispositivo que puede ser distinguida significativamente. Para un instrumento de indicación digital, es el cambio en la indicación cuando el dígito menos significativo cambia en un paso (se incrementa o decrementa).

Por ejemplo, si tenemos un amperímetro con la escala mostrada en la figura, cada una de las divisiones corresponde a 1 A. Como podemos determinar con certidumbre si la aguja se encuentra exactamente sobre uno de los segmentos o entre dos de ellos, la resolución es de 0.5 A. (La resolución está ligado fuertemente al **proceso de estimación**)

- ***Sensibilidad***: Relación entre la respuesta del instrumento (N° de divisiones recorridas) y la magnitud de la cantidad que estamos midiendo.

Por ejemplo, para un amperímetro, la sensibilidad viene dada por el N° de divisiones que deflecta la aguja cuando circula 1 A por el instrumento. La unidad de este parámetro es div/A. Si dos amperímetros tienen el mismo número de divisiones en su escala, pero el primero sufre una deflexión de 2 divisiones cuando circula 1 A, mientras que el segundo deflecta 10 divisiones para la misma corriente, este último es cinco veces más sensible que el primero.

- ***Condiciones nominales de funcionamiento***: Son las condiciones de utilización proyectadas donde las características especificadas de un instrumento de medición estan comprendidas entre límites dados por el fabricante. Cuando un equipo deba ser utilizado, ello deberá hacerse en ciertas condiciones, que serán fijadas por el fabricante. Estas condiciones que comprenden las condiciones eléctricas, mecánicas y climáticas, y no pueden, por el hecho de su naturaleza, ser el objeto de las medidas. Las condiciones nominales de funcionamiento especifican generalmente el rango de la magnitud a medir y de las magnitudes influyentes.
- ***Condiciones límites***: Condiciones extremas que puede soportar un instrumento de medición sin dañarse y sin degradarse sus características metrológicas especificadas, cuando es utilizado posteriormente bajo condiciones nominales de funcionamiento. Las condiciones límites pueden comprender valores límites para el mensurando y para las magnitudes influyentes y las mismas pueden corresponder al almacenamiento, transportación y operación.

  Por ejemplo:

  - o Un indicador - controlador de temperatura que utiliza como transductor primario una termocupla de tipo J refiere en el manual del fabricante:
  - o Temperatura de operación: (0 a 55) ºC;
  - o Temperatura de almacenamiento: - (20 a 70) ºC.

- ***Estabilidad***: Aptitud de un instrumento de medición para mantener constante en el tiempo sus características metrológicas.

- ***Transparencia***: Aptitud de un instrumento de medición de no modificar la magnitud a medir.
- ***Error máximo permitido de un instrumento de medición***: Es el valor extremo del error permitido por especificaciones, regulaciones, etc., para un instrumento de medición dado. Es la diferencia máxima, en más o en menos, establecida en la reglamentación o norma respectiva entre la indicación de un instrumento y el correspondiente "valor verdadero", determinado por patrones de referencia.

  Relacionado con los errores máximos permisibles de los instrumentos de medición está el concepto de ***clase de exactitud***, el cual se utiliza frecuentemente para caracterizar la exactitud de un instrumento.

  A modo de ejemplo, la norma internacional ISO determina que un matraz cuya capacidad nominal de 500mL presenta un error máximo permisible de ±0,25 mL, para una clase de exactitud **A**, y de ±0,50 mL, para una clase de exactitud **B**
- ***Exactitud de un instrumento de medición***: Aptitud de un instrumento de medición para dar respuestas cercanas al "valor verdadero" del mensurando. La exactitud del instrumento de medición es un concepto cualitativo que refleja la cercanía a cero de sus errores.

1.3. PRECISIÓN Y EXACTITUD.

Cuando nos referimos a la precisión de un conjunto de mediciones, estamos haciendo referencia a la dispersión que presentan los valores obtenidos entre si del mismo mesurando. La precisión de una serie de mediciones está asociada a la repetitividad de la misma, es decir al hecho de que mediciones repetidas del mismo mesurando, arrojen resultados similares o no. La figura ilustra este aspecto de la precisión y su relación con la exactitud. La exactitud de un instrumento o del método de medición está asociada a la calidad de la calibración hecha de los mismos, respecto de los patrones estándares.

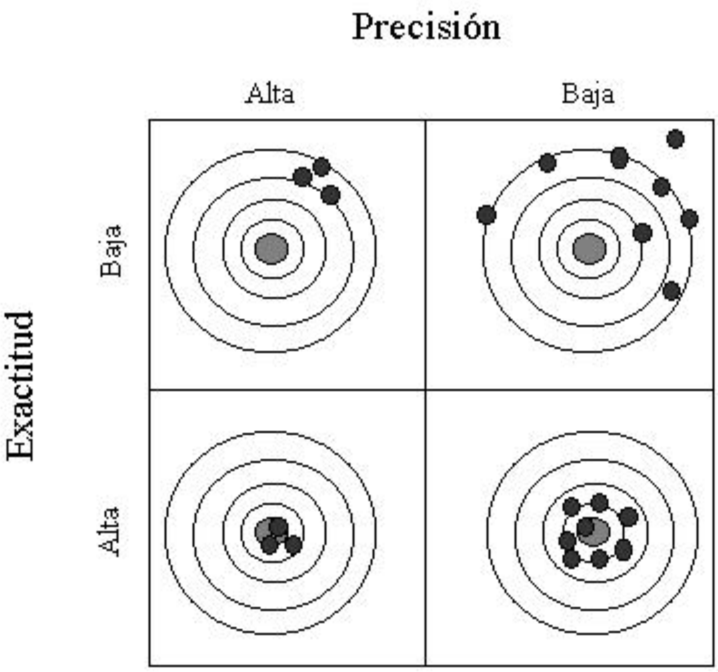


Figura. Ilustración de los conceptos de precisión y exactitud de un conjunto de mediciones. Los centros de los círculos indican la posición del "***verdadero valor***" del mesurando y los círculos oscuros los valores de varias determinaciones del centro. La dispersión de los puntos da una idea de la precisión, mientras que su centro efectivo (centroide) está asociado a la exactitud.

Cuando hablamos de la exactitud de un conjunto de mediciones, estamos haciendo referencia a cuanto se acerca o se desvía el valor medio de estas mediciones del "verdadero" valor de la misma. Esto tiene que ver con el mayor o menor sesgo de las mediciones realizadas con un dado método o instrumento de medición. (Como se verá este concepto está relacionado con el tipo de errores sistemáticos). Por ejemplo, si realizamos un conjunto de mediciones de longitud con una regla dilatada, independientemente de su precisión, el conjunto de mediciones presentará un sesgo respeto de su "verdadero" valor.

1.4. MATERIAL DE REFERENCIA.

Los materiales de referencia (MR) y los materiales de referencia certificados (MRC) hacen posible la transferencia de los valores de las magnitudes asignadas o medidas (física, química, biológica o tecnológica), entre un lugar y otro. Ellos son ampliamente usados para la calibración de los instrumentos de medición, para la evaluación, para el aseguramiento de la calidad de las mediciones, etc. Todas las clases de MR y MRC juegan un papel importante y creciente en las actividades de la normalización nacional e internacional, en los ensayos de aptitud y en la acreditación de laboratorios.

Un **material de referencia** es un material o sustancia, en el cual, uno o más valores de sus propiedades son suficientemente homogéneos y bien establecidos para ser usados en la calibración de un aparato, la evaluación de un método de medición, o para asignar un valor a un material.

Un material de referencia puede estar en forma de una sustancia pura o mezclada, y puede estar en forma de gas, líquido o sólido. Ejemplos, el agua para la calibración de los viscosímetros, el zafiro como un calibrador de capacidad calorífica en calorimetría y las soluciones usadas para la calibración en el análisis químico.

Un **material de referencia certificado** (MRC) es un material de referencia, acompañado de un certificado, en el cual uno o más valores de sus propiedades están certificados por un procedimiento que establece la trazabilidad para una realización exacta de la(s) unidad(es) en la que están expresados los valores de la propiedad y para los cuales cada valor certificado está acompañado por una incertidumbre para un nivel de confianza establecido.

La ***trazabilidad*** se define como la capacidad de relacionar los resultados de las mediciones individuales a estándares internacionales a través de una cadena ininterrumpida de comparaciones.

En términos más amplios, una medición se dice que es trazable a un determinado estándar, dentro de un cierto límite de incertidumbre, si se puede comprobar científicamente que una comparación directa con ese estándar, produciría un resultado que caiga dentro de este límite de incertidumbre. La idea fundamental detrás de la trazabilidad es poder asegurar que somos capaces de realizar una medición con un determinado grado de precisión.

2. INCERTIDUMBRE

2.1. DEFINICIÓN DE INCERTIDUMBRE

La incertidumbre de la medición es una forma de expresar el hecho de que, para un mensurando y su resultado de medición dados, no hay un solo valor, sino un número infinito de valores dispersos alrededor del resultado, que son consistentes con todas las observaciones (datos) y conocimientos que se tengan del mundo físico.

La definición del término incertidumbre (de la medición) utilizada en este curso es:

> ***Parámetro, asociado con el resultado de una medición, que caracteriza la dispersión de los valores que pudieran ser razonablemente atribuidos al mensurando.***

La definición de incertidumbre dada anteriormente se enfoca en el rango de valores que el observador cree que podría ser razonablemente atribuido al mensurando.

En general, el uso de la palabra incertidumbre se relaciona con el concepto de duda. La palabra incertidumbre sin adjetivos se refiere a un parámetro asociado con la definición anterior o al conocimiento limitado acerca de un valor particular. La incertidumbre de la medición no implica duda acerca de la validez de un mensurando; por el contrario, el conocimiento de la incertidumbre implica el incremento de la confianza en la validez del resultado de una medición.

En la práctica la incertidumbre del resultado puede originarse de muchas fuentes posibles, entre ellas podemos mencionar:

a) Definición incompleta del mensurando;
b) Realización imperfecta de la definición del mensurando;
c) Muestreo (la muestra medida puede no representar el mensurando definido. Ejemplo, se quiere determinar el diámetro de monedas de $1, pero en la población existe una muestra de $2)
d) Conocimiento inadecuado de los efectos de las condiciones ambientales sobre las mediciones, o mediciones imperfectas de dichas condiciones ambientales;
e) Errores de apreciación del operador en la lectura de instrumentos analógicos;
f) Resolución finita del instrumento o umbral de discriminación finito;
g) Valores inexactos de patrones de medición y materiales de referencia;
h) Valores inexactos de constantes y otros parámetros obtenidos de fuentes externas y usados en los algoritmos de reducción de datos;
i) Aproximaciones y suposiciones incorporadas en los métodos y procedimientos de medición;
j) Variaciones en observaciones repetidas del mensurando bajo condiciones aparentemente iguales.

El resultado de una medición está completo únicamente cuando está acompañado por una declaración cuantitativa de la incertidumbre, que expresa la calidad del mismo y permite valorar la confiabilidad en este resultado.

En la estimación de toda la incertidumbre puede ser necesario tomar cada fuente de incertidumbre y tratarla separadamente para obtener la contribución de cada fuente. Cada una de las contribuciones separadas a la incertidumbre es referida como una componente de incertidumbre.

2.2. ERROR E INCERTIDUMBRE

En general, todo procedimiento de medición tiene imperfecciones que dan lugar a un error en el resultado de la medición, lo que provoca que el resultado sea sólo una aproximación o estimado del valor del mensurando.

Es importante distinguir entre error e incertidumbre. El error es definido como la diferencia entre un resultado individual de una medición y el valor verdadero del mensurando. Es decir, el error es un simple valor. En principio el valor de un error conocido puede ser aplicado como una corrección al resultado de una medición.

El valor verdadero del mensurando es aquel que caracterizaría idealmente al resultado de la medición, o sea, el que resultaría de una medición "**perfecta**". El error es un concepto idealizado y los errores no pueden ser conocidos exactamente.

La incertidumbre, por otro lado, toma la forma de un rango, y, si es estimada para un procedimiento de medición, puede aplicarse a todas las determinaciones descritas en dicho procedimiento. En general, el valor de la incertidumbre no puede utilizarse para corregir el resultado de una medición.

Para ilustrar la diferencia, el resultado de una medición después de la corrección puede estar muy cercano al valor del mensurando, y por lo tanto tener un error despreciable. Sin embargo, la incertidumbre puede todavía ser muy grande, simplemente porque la persona que ejecuta la medición está muy insegura de cuán cercano está el resultado del valor del mensurando.

La incertidumbre del resultado de una medición nunca debe ser interpretada como la propia representación del error ni como el error remanente después de la corrección.

2.3. CLASIFICACION DE LOS ERRORES

Es considerado que un error tiene dos componentes: una componente sistemática y una componente aleatoria.

El ***error aleatorio*** normalmente se origina de variaciones impredecibles de magnitudes influyentes. Estos efectos aleatorios dan origen a variaciones en observaciones repetidas del mensurando. El error aleatorio del resultado de una medición no puede ser compensado por el incremento del número de mediciones, pero este puede normalmente ser disminuido por tal incremento.

El ***error sistemático*** es definido como la componente de error la cual en el curso de un número de mediciones del mismo mensurando, permanece constante o varía de una forma predecible. Este es independiente del número de mediciones llevadas a cabo y no puede por lo tanto ser disminuido por el incremento del número de mediciones bajo condiciones constantes de medición.

Los errores sistemáticos constantes, tal como la inexactitud en la calibración en múltiples puntos de un instrumento, son constantes para un nivel dado del valor del mensurando, pero pueden variar con el nivel del valor medido.

Los efectos que cambian sistemáticamente en magnitud durante una serie de mediciones, causados, por ejemplo, por el inadecuado control de las condiciones experimentales, dan origen a errores sistemáticos que no son constantes. Ejemplos: Un incremento gradual en la temperatura de un volumen de un fluido (líquido o gas) puede conducir a cambios progresivos en el resultado de su volumen. Los sensores que muestran efectos de envejecimiento sobre la escala de tiempo de un experimento pueden además introducir errores sistemáticos no constantes.

El resultado de una medición debe ser corregido para todos los efectos sistemáticos significativos reconocidos.

El valor que es sumado algebraicamente al resultado no corregido de una medición, para compensar el error sistemático se denomina **corrección**.

El factor numérico por el cual se multiplica el resultado no corregido de una medición para compensar el error sistemático se denomina **factor de corrección**.

Los instrumentos y sistemas de medición son frecuentemente ajustados o calibrados utilizando patrones de medición y materiales de referencia para corregir efectos sistemáticos. Las incertidumbres asociadas con estos patrones y materiales de referencia y la incertidumbre de la corrección tiene que ser tomada en cuenta.

Otro tipo de error es el **error grosero** (error espurio). Los errores de este tipo invalidan una medición y normalmente se originan de fallas humanas o de mal funcionamiento del instrumento.

Como ejemplos comunes de este tipo de error se encuentran: la transposición de dígitos en un número mientras se registran los datos, una burbuja de aire que fluye a través de la celda de un espectrofotómetro, etc.

Las mediciones para las cuales los errores groseros han sido detectados deben ser eliminadas y ningún intento debe ser hecho para incorporar estos errores a cualquier análisis estadístico. Sin embargo, los errores tales como la transposición de dígitos pueden ser corregidos.

Los errores groseros no siempre son obvios y, cuando un número suficiente de mediciones repetidas está disponible, es normalmente apropiado aplicar una prueba para chequear la presencia de datos sospechosos en el conjunto de datos. Cualquier resultado positivo obtenido de tal prueba debe ser considerado con cuidado y, cuando sea posible referido al origen para la confirmación.

3. ERRORES DE MEDICIÓN.

3.1. ERRORES INSTRUMENTALES.

La primera fuente de error es la propia limitación de los instrumentos de medición que utilizamos, los cuales podemos considerarlos de dos tipos fundamentales:

1. Los errores que se determinan en el proceso de calibración del instrumento, los cuales son debidos al propio diseño estructural del instrumento de medición, a las propiedades de los materiales que lo componen, a imperfecciones en la tecnología de su fabricación y al envejecimiento de sus partes componentes durante el proceso de suexplotación.

   De acuerdo a la exactitud prevista en la medición, estos errores instrumentales pueden disminuirse en gran medida, introduciendo las correcciones correspondientes reportadas en su certificado de calibración. De hecho, todo instrumento de medición debe ser calibrado periódicamente, ya que de otra forma no se puede asegurar si las lecturas proporcionadas por el mismo son o no correctas. Si un instrumento de medición tiene su calibración vigente y ha sido usado correctamente, se puede afirmar que sus errores están dentro de los límites del error máximo permisible especificados en la documentación correspondiente.

2. Errores que surgen a consecuencia de la influencia del instrumento de medición sobre las propiedades del objeto o fenómeno que se mide. Tales situaciones surgen, por ejemplo, al medir la longitud cuando el esfuerzo de medición del instrumento utilizado es demasiado grande, al registrar procesos que ocurren con rapidez con equipos que funcionan insuficientemente rápido; al medir la temperatura con termómetros de líquido, etc. En especial esto debe tenerse en cuenta en los instrumentos eléctricos y electrónicos, puestos que estos para producir una indicación, precisan energía que ha de ser proporcionada por el circuito donde se realiza la medición.

   Aunque la calidad de un instrumento está relacionada con los errores que produce, éstos también dependen de la forma en que sean utilizados. Por tanto, se recomienda conocer lo mejor posible las características de un instrumento antes de utilizarlo. Si no se cumplen los requisitos establecidos en el manual técnico del instrumento de medición dado, tales como condiciones nominales de funcionamiento, tiempo deprecalentamiento, correcta instalación, etc., el error de medida puede ser bastante mayor que el esperado.

3.1.1. ERRORES DE MÉTODO.

Los errores de método, también denominados errores teóricos, son los debidos a la imperfección del método de medición. Entre estos podemos señalar los siguientes:

1. Errores que son la consecuencia de ciertas aproximaciones al aplicar el principio de medición y considerar que se cumple una ley física determinada o al utilizar determinadas relaciones empíricas.
2. Errores del método que surgen al extrapolar la propiedad que se mide en una parte limitada del objeto de medición al objeto completo, si éste no posee homogeneidad dela

propiedad medida. Por ejemplo, cuando determinamos la densidad de una sustancia a partir de la masa y el volumen de una muestra que contenía cierto grado de impurezas y el resultado se considera que caracteriza a lasustancia dada.

3.1.2. ERRORES DEBIDO A AGENTES EXTERNOS.

Los agentes externos que actúan en el proceso de medición se pueden clasificar en dos grupos:

1. Factores ambientales. Tanto la magnitud a medir como la respuesta de los instrumentos de medición, dependen en mayor o menor grado de las condiciones ambientales en que el proceso se lleva a cabo. Como variables ambientales citaremos la temperatura, la humedad y la presión; la primera es sin duda la más significativa. Es necesario considerar además el nivel de iluminación, la contaminación del ambiente, el nivel de polvo, etc.
2. Presencia de señales o elementos parásitos. Los elementos parásitos que generalmente se presentan al efectuar una medición, pueden ser de dos tipos:
    - Los que inciden sobre la medición de forma errática, perturbando las condiciones de equilibrio del sistema de medición y disminuyendo su exactitud. Por ejemplo, vibraciones mecánicas, corrientes de aire, zumbidos de la red eléctrica y señales de radiofrecuencia. Estas señales perturbadoras producen en ciertos casos un ruido de fondo en la respuesta de los instrumentos electrónicos, o hacen inestable el dispositivo de lectura cuando hay partes mecánicas móviles, produciendo efectos aleatorios y aumentando la incertidumbre de la medición.
    - Agentes físicos de igual naturaleza que la de la magnitud a medir que se hallan presentes de modo prácticamente constante. Por ejemplo, campos electrostáticos o magnetostáticos (como puede ser el campo magnético terrestre), fuerzas electromotrices termoeléctricas o de contacto presentes en una instalación de medición, etc.

3.1.3. ERRORES DEBIDOS AL OBSERVADOR.

Entre los errores debido al observador podemos señalar:

- Errores de paralaje o de interpolación visual al leer en la escala de un instrumento;
- Errores debido a un manejo equivocado del instrumento;
- Omisión de operaciones previas o durante la medición, como puede ser un ajuste a cero, tiempo mínimo de precalentamiento, etc.

3.1.4. ERRORES MATEMÁTICOS.

Frecuentemente, con los datos de las mediciones es necesario realizar determinados cálculos para obtener el resultado final; por tanto, otra fuente de error son los errores matemáticos que se comenten al emplear fórmulas inadecuadas, redondear las cantidades, etc.

3.2. COMO EXPRESAR UNA MEDIDA

La expresión final de la incertidumbre "δx" de una medición de la magnitud "x" debe considerar a las diferentes contribuciones, de diferente origen y tipo. Además, se debe distinguir entre tipos de medición que se realiza (directo o indirecto) y si la medida es realizada una única vez o si se realiza un conjunto de veces.

1. Si la medida se toma una sola vez:

El error que asignaremos estará en la categoría de errores sistemáticos.

Medida Directa: La magnitud física que se desea obtener es la que se mide mediante el proceso físico. En estos casos adoptaremos un criterio que nos parece el más sencillo:

- En los instrumentos analógicos, adoptaremos la apreciación del instrumento como error en la medida (en ciertos casos también puede ser utilizada la estimación).

- En los instrumentos digitales el manual del instrumento trae un instructivo sobre cómo calcular el error en la lectura. (Generalmente es un porcentaje de la lectura más un valor fijo).

Medida Indirecta: Si queremos medir una magnitud que depende de otra magnitud mediante una cierta expresión analítica $V(r)$, se dice que la magnitud V es indirecta si se obtiene midiendo r mediante el proceso de medida y utilizando la expresión analítica para determinar V. Los errores en r afectan el valor de V. El método para determinar la incertidumbre se denomina Método de Propagación de Errores y será detallado más adelante.

En general, todas estas fuentes de error estarán presentes en una medición, de modo que resulta útil definir la ***incertidumbre nominal de una medición*** σ_{nom}, como la combinación de todas las incertidumbres identificadas. Las incertidumbres identificadas se presuponen que son todas las fuentes de error y son todas independientes unas de otras. Si se tiene una incertidumbre en la falta de definición en el objeto, σ_{def}, la apreciación del instrumento σ_{ap}, etc., la σ_{nom} viene dado por $\sigma^2_{nom} = \sigma^2_{def} + \sigma^2_{ap} + \cdots$ Los puntos suspensivos indican los aportes de otras posibles fuentes de error.

2. Si se realiza una serie de medidas, métodos estadísticos definen un rango de fiabilidad, σ_{est}, a partir del conjunto de mediciones.

La prescripción usual es combinarlas de la siguiente manera:

$$\delta x = \sigma_{efectiva} = \sqrt{\sigma^2_{est} + \sigma^2_{nom}} \quad (1)$$

> *En 1993, la Organización Internacional de Normalización (ISO) publicó la primera guía oficial a nivel mundial para la expresión de la incertidumbre de medidas. En esta guía, las incertidumbres estadísticas se denominan incertidumbres tipo A, mientras que las que no se corrigen a partir de la repetición de mediciones se suelen asociar a la incertidumbre tipo B que incluye los errores sistemáticos y todos los otros factores de incertidumbre que el experimentador considera importantes y no se corrigen por mediciones repetidas del mismo mesurando. Según esta guía, al informar sobre la medición, el valor medido debe ser reportado, junto con una estimación del total combinado de las incertidumbres* ***tipo A*** *y* ***B*** *del valor. La incertidumbre total o error efectivo se encuentra mediante la combinación de los componentes de la incertidumbre.*

4. PROCEDIMIENTOS ESTADÍSTICOS ÚTILES

4.1. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE LA VARIABLE ALEATORIA

El resultado de cada observación realizada en un proceso de medición depende de la acción de un gran número de factores que varían durante el proceso de medición de forma incontrolable (efectos aleatorios), por ejemplo:

- Pequeñas corrientes de aire y vibraciones;
- Variación de la atención del ojo del observador;
- Variaciones de la temperatura, la humedad y la presión atmosférica;
- Variaciones de los momentos de fricción entre partes móviles de instrumentos mecánicos;
- Fluctuaciones del voltaje y la frecuencia de la red de alimentación eléctrica.

Por esta razón, al repetir muchas veces una medición obtendremos diferentes valores en cada realización, algunos de los cuales pueden o no repetirse. La experiencia demuestra que, por mucho que se trate, es imposible lograr la misma combinación de factores en cada observación repetida. Los fenómenos que cumplen estas condiciones se llaman ***fenómenos aleatorios*** y las variables que los caracterizan se denominan ***variables aleatorias***[1]. Por tanto, ***el resultado de una medición es una variable aleatoria***, para el tratamiento de las cuales se usan los *métodos de la teoría de probabilidades y la estadística matemática*. Utilizaremos la letra mayúscula X para denotar la variable aleatoria (resultado de la medición) y su correspondiente minúscula, x, para uno de sus valores.

Las variables aleatorias pueden ser:

- Variables aleatorias discretas;
- Variables aleatorias continuas.

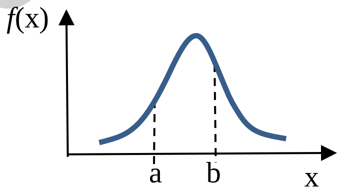
Para una ***variable aleatoria discreta*** siempre es posible contar su conjunto de resultados posibles. Por ejemplo, el número de ítems defectuosos en una muestra de k ítems.

Cuando una variable aleatoria puede tomar valores en una escala continua, se le denomina ***variable aleatoria continua***.

A pesar del carácter aleatorio de los resultados de las observaciones individuales repetidas bajo las mismas condiciones en un proceso de medición, en ellos aparece una ley determinada que expresa una regularidad dada. Toda variable aleatoria responde a una cierta ley de distribución que se expresa a través de la denominada *función de densidad de probabilidad*, la cual se define de la siguiente forma:

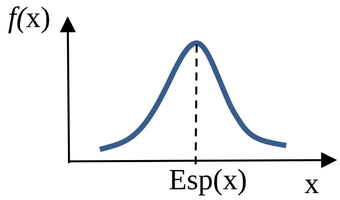
$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (2)$$

f(x) se denomina función de densidad de probabilidad[2]. La probabilidad de que la variable aleatoria tome valores en el intervalo [a,b] es igual al área bajo la curva acotada por los dos extremos del intervalo.El valor del área bajo la curva es igual a 1 cuando se calcula en el rango de x para el cual se define *f(x)*. La función de densidad de probabilidad constituye el método más universal de descripción de las variables aleatorias, pues ella indica al mismo tiempo los valores que la variable puede tomar y la probabilidad de que los tome.



Resulta muy práctico caracterizar la variable aleatoria con ayuda de ciertas cantidades numéricas que la caracterizan globalmente. Estas son las llamadas medidas de tendencia central y de dispersión, entre las cuales, las más usadas para el tratamiento de los resultados de las mediciones y de su incertidumbre son: la esperanza matemática, la varianza y la desviación estándar.

La esperanza matemática (*Esp*(x)) o media de la población expresa el valor medio de la variable aleatoria dada x, mediante la ley de distribución de la misma. Desde el punto de vista geométrico, representa la abscisa del centro de gravedad de la figura formada por el eje de las abscisas y la función de densidad de probabilidad.



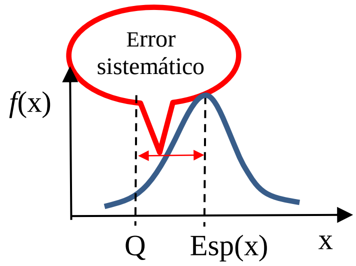
Sea x una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f(x)$. La esperanza matemática o valor esperado *Esp*(x) de x es dado por

$$Esp(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx \qquad (3)$$

[1] Una variable aleatoria (v.a.) es una función que asocia a cada resultado del espacio muestral un número real. v.a. Discreta: Toma valores en un conjunto numerable. v.a. Continua: Toma valores en un conjunto infinito no numerable. A un suceso experimental se le asocia un número real a través de la variable aleatoria.

[2] La distribución de probabilidad de una v.a. es una función que asigna a cada valor posible de dicha v.a. una probabilidad.

Desde el punto de vista de las mediciones, este valor que representa el valor medio de la variable aleatoria resultante de las observaciones individuales, se toma precisamente como resultado de la medición. La diferencia constante entre la esperanza matemática y el valor del mensurando (Q) representa el error sistemático de la medición. Puesto que no es posible conocer el valor exacto de la esperanza matemática (sino sólo su estimado[3]), ni tampoco conocemos el valor exacto del mensurando, queda claro que el error sistemático de la medición no se puede conocer.



De acuerdo a la definición de esperanza matemática, para determinarla sería necesario contar con información sobre todos los posibles valores que podría tomar la variable aleatoria (**población**). En la práctica, sin embargo, sólo contamos con un número limitado de observaciones (**muestra**) y, a partir de esta muestra, necesitamos estimar el valor de la esperanza matemática de la variable aleatoria. En calidad de estimador de la esperanza matemática se utilizará la media aritmética (o promedio):

$$\bar{x} \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{4}$$

El promedio de las desviaciones cuadráticas de los valores obtenidos respecto del valor más probable se denomina varianza (s^2) y puede expresarse como

$$s^2 \equiv \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \tag{5}$$

Como la varianza tiene dimensiones del cuadrado de la magnitud aleatoria, se usa la desviación estándar, σ, la cual proporciona la dispersión de las observaciones

$$\sigma = +\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \tag{6}$$

Este valor da una idea global acerca de la dispersión de los resultados alrededor del promedio. Si se obtiene el promedio de una serie de medidas y se vuelve a realizar *N* medidas bajo las mismas condiciones el nuevo promedio no tiene por qué coincidir con el anterior y tampoco sus desviaciones estándares.

La noción de varianza surge para cuantificar la media de las desviaciones cuadráticas de una variable aleatoria, considerando el valor medio de ésta. La varianza consiste en una medida vinculada a la dispersión de las variable aleatória. Cuantifica la variabilidad de una distribución.

Uno de los conceptos más importantes relacionados con la varianza es la desviación estándar (muchas veces denominado desviación típica), que representa la magnitud de la dispersión de la variable. Para obtenerla, simplemente se parte de la varianza y se calcula su raíz cuadrada.

Es importante notar que σ no depende de *N*, sino del proceso de medición. Si un observador aumenta en número de mediciones *N*, en la expresión (4) aumenta tanto el numerador como el denominador, pero el resultado no cambia significativamente.

Si medimos con cuidado, σ será pequeño, pero si realizamos las mediciones sin precauciones o cuidados, es de esperar que σ sea grande. Así, para este último caso esperamos una distribución de mediciones ancha. En el caso de mediciones cuidadosas, esperamos la distribución de mediciones esté bien afinada alrededor del promedio $\bar{x}$, por lo que σ será pequeño. La calidad del proceso de medición será mayor cuanto menor sea $\sigma/\bar{x}$, que en general es una constante del proceso de medición y no depende de *N*.

[3] Un estimador estadístico es una medida cuantitativa utilizado para estimar un parámetro desconocido de la población.

5. Propagación de errores

5.1. Magnitud dependiente de un solo mensurando

Supongamos que una cierta magnitud V es función de otra magnitud r, es decir que podemos escribir $V = V(r)$ y que V se obtiene midiendo primero r y luego calculando su valor mediante la fórmula que las vincula. En este caso se dice que la medición de V es indirecta. En general será de interés obtener la incertidumbre en V sabiendo la incertidumbre en r. Si el valor de r está entre $r-\delta r$ y $r+\delta r$, el valor de V estará entre $V(r-\delta r)$ y $V(r+\delta r)$. Si la incertidumbre en r no es muy grande, entonces en primera aproximación podemos escribir $V(r\pm\delta r) \approx V(r) \pm V'(r)\delta r$, donde $V'(r)$ es la derivada de $V(r)$ con respecto a r, por lo que podemos estimar la incertidumbre de V en la forma:

$$\begin{aligned} V(r\pm\delta r) &\approx V(r)\pm V'(r)\delta r \approx V(r)\pm\delta V \\ \delta V &= \left|V'(r)\delta r\right| \end{aligned} \tag{7}$$

Recordemos que $V'(r) = \dfrac{dV_{(r)}}{dr}$, por lo que la incertidumbre en V puede ser escrita como:

$$\delta V = \left|\frac{dV_{(r)}}{dr}\right|\delta r \tag{8}$$

Se toma el módulo a efectos de que δV sea positivo.

En el caso de una función de dos o más variables, $f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, podemos estimar la incertidumbre de manera similar. Comenzamos, nuevamente, con un desarrollo de Taylor de primer orden de f en torno al punto $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, cuyas incertidumbres son $\delta\alpha_1,\delta\alpha_2,\cdots,\delta\alpha_n$ respectivamente en la forma:

$$\begin{aligned} &f(\alpha_1\pm\delta\alpha_1,\alpha_2\pm\delta\alpha_2,\cdots,\alpha_n\pm\delta\alpha_n) \approx \\ &f(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \pm \frac{\partial f}{\partial\alpha_1}\delta\alpha_1 \pm \frac{\partial f}{\partial\alpha_2}\delta\alpha_2 \pm\cdots\pm \frac{\partial f}{\partial\alpha_n}\delta\alpha_n \end{aligned}$$

El operador $\partial/\partial\alpha_P$ indica derivada parcial respecto de la variable α_P. Se puede decir, grosso modo, que esa derivada asume que todas las demás variables α_Q con $Q \neq P$ son constantes al ser derivadas respecto de α_P (es decir: $\partial\alpha_Q/\partial\alpha_P = 0,\ si\ Q\neq P$). También mencionar que las derivadas parciales son evaluadas en el punto $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$. Restando el primer sumando del lado derecho de la ecuación anterior y elevando al cuadrado (despreciando los productos cruzados), podemos obtener

$$\delta f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha_1}\right)^2\delta\alpha_1^{\,2} + \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha_2}\right)^2\delta\alpha_2^{\,2} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha_n}\right)^2\delta\alpha_n^{\,2} \tag{9}$$

Por lo que la incertidumbre en f es

$$\delta f = +\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha_1}\right)^2\delta\alpha_1^{\,2} + \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha_2}\right)^2\delta\alpha_2^{\,2} + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial\alpha_n}\right)^2\delta\alpha_n^{\,2}} \tag{10}$$

Esta es la fórmula de propagación de errores. Una simplificación de la misma, empleada ampliamente en la literatura, es:

$$\delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\right|\delta\alpha_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\right|\delta\alpha_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha_n}\right|\delta\alpha_n \qquad (11)$$

Ejemplo: Se quiere determinar la incertidumbre asociada al volumen de un cilindro al usar la fórmula $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h la altura del mismo, conociendo las incertidumbres en estas últimas dos variables. Para determinar la incertidumbre, primero se efectúan las derivadas parciales de respecto a r y h.

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial\left(\pi r^2 h\right)}{\partial r} = \pi h \frac{\partial\left(r^2\right)}{\partial r} = \pi h \, 2r$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial\left(\pi r^2 h\right)}{\partial h} = \pi r^2 \frac{\partial\left(h\right)}{\partial h} = \pi r^2$$

Empleando la ecuación (11) se tiene:

$$\delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial r}\right|\delta r + \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|\delta h$$

Por lo que la expresión final es:

$$\delta V = \pi h \, 2r\delta r + \pi r^2 \delta h$$

Empleando la ecuación (10) se tiene:

$$\delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 \delta r^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \delta h^2}$$

Por lo que la expresión final es:

$$\delta V = \sqrt{\left(\pi h \, 2r\delta r\right)^2 + \left(\pi r^2 \delta h\right)^2}$$

A modo de evidenciar la diferencia entre ambos cálculos daremos valores a las variables. Sea $r = \left(11,4 \pm 0,1\right)cm$ y $h = \left(35,7 \pm 0,2\right)cm$, la incertidumbre según la ecuación (11) da $\delta V_{ec.11} = 3,4 \times 10^{-4} m^3$ y según la ecuación (10) $\delta V_{ec.10} = 2,7 \times 10^{-4} m^3$ (Observar que $\delta V_{ec.11} \rangle \delta V_{ec.10}$).

La expresión final del volumen es

$$V_{ec.11} = \left(145,8 \pm 3,4 \times 10^{-4}\right) m^3$$

$$V_{ec.10} = \left(145,8 \pm 2,7 \times 10^{-4}\right) m^3$$

Las incertidumbes calculados por ambas ecuaciones dan muy próximos entre sí y ambas fórmulas son aceptadas en la literatura sobre el tema. En este curso, utilizaremos la ecuación(10), a modo de convención.

5.2. MAGNITUD DEPENDIENTE DE VARIOS MENSURANDOS

Profundizando un poco más, nos preguntamos como se propaga la incertidumbre cuando se tiene una variable que surge de varias variables aleatorias. La pregunta que subyace es: ¿Cómo podemos combinar la desviación estándar de las mediciones de cada variable y así estimar la incertidumbre en el resultado? Supongamos que queremos determinar la cantidad x, que es una función de al menos dos variables medidas, u y v. Vamos a determinar las características de x a partir de las de u y v y desde la dependencia fundamental

$$x = f(u, v, \ldots)$$

La incertidumbre en x se puede encontrar considerando la propagación de los valores de x, resultante de combinar las mediciones individuales $\left(u, v\right)$, en resultados individuales x_i :

$$x_i = f(u_i, v_i, \ldots)$$

En el límite de un número infinito de mediciones, la media de la distribución coincidirá con el promedio, $\bar{x}$ y la varianza σ^2 (que es el cuadrado de la desviación estándar σ) viene dado por:

$$\sigma^2 = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N-1}\sum\left(x_i - \bar{x}\right)^2\right] \tag{12}$$

Podemos expresear la desviación $x_i - \bar{x}$ en función de las desviaciones de los parámetros $u_i - \bar{u},\ v_i - \bar{v}$ como

$$x_i - \bar{x} \simeq \left(u_i - \bar{u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \left(v_i - \bar{v}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \cdots$$

donde cada derivada parcial es evaluada manteniendo todas las otras variables fijas en su valor promedio.

Combinando estas ultimas dos expresiones podemos determinar la varianza σ_x^2 en función de las varianzas $\sigma_u^2, \sigma_v^2, \ldots$ de las variables $u, v, \ldots$

$$\sigma^2 \simeq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N-1}\sum\left[\left(u_i - \bar{u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \left(v_i - \bar{v}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \cdots\right]^2$$

$$\simeq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N-1}\sum\left[\left(u_i - \bar{u}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(v_i - \bar{v}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + 2\left(u_i - \bar{u}\right)\left(v_i - \bar{v}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \cdots\right]$$

Los dos primeros términos, pueden expresarse en función de las varianzas

$$\sigma_u^2 = \lim_{N-1\to\infty}\left[\frac{1}{N-1}\sum\left(u_i - \bar{u}\right)^2\right] \quad \sigma_v^2 = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N-1}\sum\left(v_i - \bar{v}\right)^2\right]$$

Para expresar el tercer término de la ecuación en una forma similar, introducimos la covarianza σ_{uv}^2 entre las variables u y v definidas análogamente a la varianzas:

$$\sigma_{uv}^2 \equiv \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N-1}\sum\left(u_i - \bar{u}\right)\left(v_i - \bar{v}\right)\right]$$

Con estas definiciones, la aproximación a la varianza σ_x^2 de x es

$$\sigma^2 \simeq \sigma_u^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \sigma_v^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \cdots + 2\sigma_{uv}^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \cdots \tag{13}$$

Esta última ecuación es conocida como *ecuación de propagación de errores*. Los dos primeros términos de la ecuación son los que dominan las incertidumbres. En el caso que las fluctuaciones en u no dependan de las de v, el último término es despreciable. En general, se utiliza esta ecuación para determinar los efectos de las incertidumbres sobre el resultado final de la medición y se descuidan los términos covariantes.

$$\sigma^2 \simeq \sigma_u^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \sigma_v^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \cdots \tag{14}$$

5.3. INCERTIDUMBRE ASOCIADA AL VALOR MEDIO.

¿Qué incertidumbre está asociada en la determinación del valor medio $\bar{x}$ en la ecuación (4)? Hemos supuesto que todos los datos x_i se extrajeron de la misma distribución y se obtuvieron con una incertidumbre caracterizada por la misma desviación estándar σ. Cada uno de los datos contribuye a la determinación del promedio y por lo tanto cada uno de los datos aporta una incertidumbre a la determinación del resultado final[4].

La ecuación de propagación de errores [véase ecuación (14)] muestra como las incertidumbres de varios términos contribuyen a un solo resultado. Aplicando esta relación a la ecuación (4) para encontrar la varianza σ_x^2 del promedio $\overline{x}$, obtenemos

$$\sigma_x^2 = \sum\left[\sigma_i^2\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i}\right)^2\right] \tag{15}$$

donde σ_i^2 es la varianza de cada medida de datos x_i ponderado por el cuadrado del efecto $\partial\overline{x}/\partial x_i$ (En esta ecuación se ignoran las correlaciones entre las mediciones y además el subíndice *i* corresponde a una serie de medidas). Si las incertidumbres de los datos son todas iguales $\sigma_i = \sigma$, las derivadas parciales en la ecuación (15) son simplemente

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{N}\sum x_i\right) = \frac{1}{N} \tag{16}$$

Combinando las ecuaciones (15) y (16) se obtiene

$$\sigma_x^2 = \sum\left[\sigma_i^2\left(\frac{1}{N}\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{N} \tag{17}$$

para la estimación de la ***incertidumbre estándar del promedio*** o ***error del promedio*** (σ_x). Así, la desviación estándar de nuestra determinación de la media $\overline{x}$ y, por tanto, la precisión de nuestra estimación de la cantidad $\overline{x}$, mejora como la raíz cuadrada del número de mediciones.

La incertidumbre σ_x en la determinación del promedio es

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \approx \frac{s}{\sqrt{N}} \tag{18}$$

siendo s

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

Entonces, el aumento de N mejora la determinación del valor como el promedio, pero no afecta en nada la fluctuación σ de cada dato.

La ecuación (16) nos da una alternativa para calcular con buena precisión -para N suficientemente grande, como se verá en la sección 5.4- la desviación estándar del promedio, σ_x. Si quisiéramos calcular σ_x a partir de su definición, debermos proceder de la siguiente manera. Comenzamos tomando una serie de mediciones $\left\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_N^{(1)}\right\}$ y calculamos su promedio $\overline{x}^{(1)}$ y desviación estándar $\sigma^{(1)}$. Luego repetimos el experimento bajo las mismas condiciones con las que se tomó la primera serie de mediciones, y obtenemos otra serie de N mediciones $\left\{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_N^{(2)}\right\}$ y calculamos su promedio $\overline{x}^{(2)}$ y desviación estándar $\sigma^{(2)}$.

[4] Supongamos que hemos obtenido un promedio $\overline{x}$ de una serie de mediciones $x_1, x_2, \cdots, x_N$. Hagamos ahora otra serie de N mediciones en las mismas condiciones que la anterior, obteniendo los valores $x_1', x_2', \cdots, x_N'$. El promedio $\overline{x}'$ de esta segunda serie no tiene por qué coincidir con el de la primera, (es de esperar que estos valores medios también se presenten su propia distribución puesto que variarán entre sí). Tampoco las desviaciones estándar σ y σ' serán idénticas aunque su orden de magnitud siempre será el mismo, puesto que representan una característica del proceso de medición en sí que, por hipótesis, es el mismo en ambas series.

Dado que cada medición son variables estadísticas, su suma también lo es, y por lo tanto los promedios también lo serán. Esto significa que $\bar{x}^{(1)}$ y $\bar{x}^{(2)}$ serán diferentes (salvo un caso excepcional y fortuito).

Además, si la cantidad de mediciones N es suficientemente grande, y los experimentos se hicieron bajo las mismas condiciones experimentales, se espera que $\sigma^{(1)} \approx \sigma^{(2)}$, lo que para nosotros es una fuerte hipótesis.

Si seguimos tomando nuevos conjuntos de mediciones, hasta tener M conjuntos, cada uno con N mediciones, se obtiene:

$$
\begin{array}{ll}
\left\{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_N^{(1)}\right\}, & con\ \bar{x}^{(1)}\ y\ \sigma^{(1)} \\
\left\{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_N^{(2)}\right\}, & con\ \bar{x}^{(2)}\ y\ \sigma^{(2)} \\
\vdots & \quad\vdots \quad\quad \vdots \\
\left\{x_1^{(M)}, x_2^{(M)}, \ldots, x_N^{(M)}\right\}, & con\ \bar{x}^{(M)}\ y\ \sigma^{(M)}
\end{array}
$$

Como se menciono anteriormente, se espera que $\sigma^{(1)} \approx \sigma^{(2)} \approx \cdots \approx \sigma^{(M)}$. Llamemos σ a cualquiera de dichas desviaciones estándar, dado que son todas iguales (en la práctica serán similares).

Como dijimos, los promedios serán todos diferentes, y el conjunto formado por los promedios $\left\{\bar{x}_1^{(M)}, \bar{x}_2^{(M)}, \ldots, \bar{x}_N^{(M)}\right\}$ tendrá un valor medio $\bar{X}$ y una desviación estándar σ_x (el mismo de la ecuación(18)), que se calcularía aquí a partir de la ecuación 6 como:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{k=1}^{M}\left(\bar{x}^{(k)} - \bar{X}\right)^2} \tag{19}$$

Como se demostró en la ecuación(18), cuando N es suficientemente grande, σ_x tiende a cero. Esto significa que la desviación estándar de $\left\{\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_2^{(2)}, \ldots, \bar{x}_N^{(M)}\right\}$ tiende a cero y por lo tanto, todos estos valores están muy próximos entre sí. Es decir, si N→∞, se cumple que $\bar{x}_1^{(1)} \approx \bar{x}_2^{(2)} \approx \ldots \approx \bar{x}_N^{(M)}$ (donde, por supuesto, cada uno de ellos sería $\bar{X}$).

Conclusión: si N es suficientemente grande (ver sección 5.4), alcanza con tomar una serie de N mediciones, ya que la siguiente serie arrojará un valor promedio muy similar al anterior (el mismo, considerando la incertidumbre nominal, como ser explica en la sección 5.4).

Es importante tener en cuenta el hecho de que el error en la medida no puede hacerse arbitrariamente chico dado que siempre existe el error de apreciación. No tiene sentido disminuir el error estadístico a un valor menor que el error de apreciación, este último impone una cota inferior sobre σ_x (esto se tratará en la sección 5.4).

Estadisticamente, (sin considerar el método experimental aplicado) existen dos criterios para indicar el resultado numérico de una serie de medidas:

i. $\bar{x} \pm \sigma_x$

ii. $\bar{x} \pm \sigma$

En el caso i) la incertidumbre estadística depende del número de medidas realizado, e indica que tanto se aproxima el valor promedio determinado al valor "*real*" de la medida. Mientras que, en el otro caso, la incertidumbre es independiente del número de medidas, e indica la calidad de cada medida de la serie de medición realizadas.

Entonces, por ejemplo una persona que realice la experiencia con mucho cuidado obtendrá un bajo σ, mientras que una persona que realice la experiencia de forma más descuidada repitiéndola muchas más veces que el primero puede obtener una incertidumbre σ_x menor, aunque cada medición sea de menor calidad. Ambos criterios pueden ser utilizados, pero se debe tener presente la diferencia de definiciones entre los errores.

Para escribir la medida correctamente se debe tener cuidado en las cifras significativas, por lo tanto debemos saber asignarle a σ_x o σ sus respectivas cifras significativas.[5]

5.4. NÚMERO ÓPTIMO DE MEDICIONES

Recordemos que σ mide la dispersión de la distribución de las mediciones individuales y que no depende de N sino de la calidad de las mediciones, mientras que σ_{est} disminuye al aumentar N. Como vimos en la Ec.(1), la incertidumbre efectiva de una medición viene dado por la combinación de las incertidumbres nominal[6] y estadística, es decir:

$$\delta x = \sqrt{\sigma_{est}^2 + \sigma_{nom}^2}$$

En principio parece tentador pensar que, si medimos una magnitud un gran número de veces, podremos despreciar la contribución de la incertidumbre estadística. Ciertamente σ_{est} disminuye al aumentar N, pero el costo en tiempo y dinero también aumenta monótonamente con N. Es claro que solo tiene sentido que disminuir σ_{est} solo hasta que sea igual o del orden de σ_{nom}, que está determinado por el instrumental y el método de medición. Disminuciones mayores de σ_{est} no resultarían en una disminución apreciable de la incertidumbre efectiva δx y por lo tanto su disminución no resultaría redituable.

La Ec.(1) indica que es razonable disminuir σ_{est} hasta que $\sigma_{est} \approx \sigma_{nom}$. Esto nos da un criterio para decidir cual es el número óptimo de mediciones a realizar.

Como σ es independiente de N, la idea es hacer un número pequeño de mediciones preliminares(N_{prel}, entre 5 y 10 mediciones) y luego calcular σ. De las características del instrumento y de los procedimientos usados podemos conocer σ_{nom}. De la condición $\sigma_{est}(N_{op}) = \sigma \big/ \sqrt{N_{op}} \approx \sigma_{nom}$, el número óptimo de mediciones será:

$$N_{op} \approx 1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_{nom}} \right)^2 \tag{20}$$

el término unidad del segundo miembro nos asegura que siempre es necesario realizar al menos una medición (en el caso que solo se realice una única medición, obviamente σ es cero) . Si $N_{op} \rangle N_{prel}$, se completan las mediciones para lograr N_{op} valores y se recalcula σ. En caso que $N_{op} \langle N_{prel}$, no se realizan más mediciones que las preliminares y se usan todas ellas.

6. DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

Al realizar una serie de medidas, todas en las mismas condiciones experimentales, se puede observar que hay valores que se encuentran más cerca del promedio que otros. Al realizar una nueva medida no podemos anticipar el resultado, pero sí podemos decir que con buena probabilidad estará cerca del promedio y con una probabilidad mucho menor lejos del mismo. Resumiendo, no podemos predecir el valor de una medida, pero si podemos decir con qué probabilidad se encontrará en un cierto intervalo.

Supongamos que tenemos una serie de valores, y dividimos los posibles valores de x en intervalos iguales Δx. Si graficamos el número de medidas n que caen en cada intervalo Δx, obtenemos lo

---

[5] Como receta práctica tomaremos dos cifras significativas para la incertidumbre del promedio.

[6]Recordemos que la incertidumbre nominal σ_{nom} esta dada por la combinaciónde todas las incertidumbres identificadas ($\sigma_{nom}^2 = \sigma_{def}^2 + \sigma_{ap}^2 + \cdots$).

que se conoce como histograma. Usualmente se obtienen resultados como los que se muestran en la figura 4. Al aumentar la estadística (es decir el número de medidas N) podemos disminuir el valor de Δx sin correr el riesgo de no obtener un número suficientemente grande en cada intervalo.

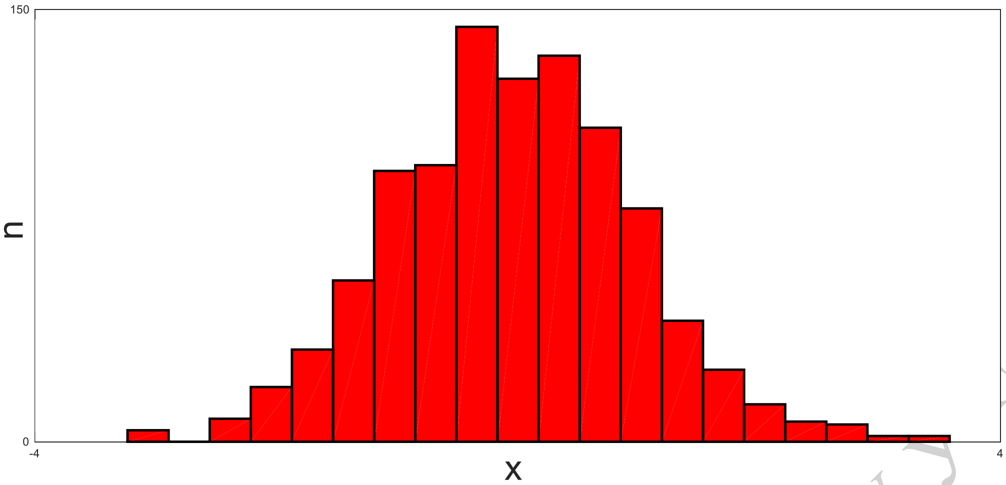


Figura 4. Histograma de la variable x

La desviación estándar se relaciona con el ancho de la curva: cuanto mayor sea la desviación estándar, mayor será el ancho del histograma de la figura 4. Este histograma puede ser interpretado también en términos de probabilidad. Si llamamos $p_i = n_i / n$, siendo n_i el número de resultados que caen en el intervalo i-ésimo, en el límite de $n \to \infty$, p_i representa la probabilidad de obtener un resultado en ese intervalo.

La experiencia muestra que para todos los casos de errores aleatorios en los cuales las series de medidas fueron realizadas bajo las mismas condiciones, el histograma que se obtiene puede ser aproximado por una función continua bien definida y única, cuya forma es siempre la misma, dependiendo sólo de los parámetros que podrán variar dependiendo de la experiencia realizada.

Si Δn es el número de valores numéricos que caen en un determinado intervalo entre x y $x + \Delta x$, la dependencia de Δn con x y la longitud del intervalo Δx está dada de forma aproximada por:

$$\Delta n = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(\bar{x} - x)^2}{2\sigma^2} \right) \Delta x \qquad (21)$$

Se puede demostrar que σ es la desviación estándar de la serie de medidas y $\bar{x}$ su valor medio. Se denomina densidad de observaciones dn/dx, correspondiente al número de observaciones dn en un intervalo dx a:

$$\frac{dn}{dx} = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(\bar{x} - x)^2}{2\sigma^2} \right) \qquad (22)$$

La integral de esta función de observaciones en todo el espacio corresponde al número de medidas realizadas. Si integramos dn/dx entre dos valores x_1 y x_2, obtenemos el número de medidas que cayeron en ese intervalo ΔN, al dividir esto por el número total de medidas N, obtenemos la probabilidad de que una medida esté comprendida en dicho intervalo (casos favorables sobre casos totales).

$$\frac{\Delta n}{N} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(\bar{x} - x)^2}{2\sigma^2} \right) dx \qquad (23)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(\bar{x} - x)^2}{2\sigma^2} \right) \qquad (24)$$

La función $f(x)$ definida en la expresión anterior es una función distribución de probabilidad, ya que al integrarla en un cierto intervalo determina la probabilidad de obtener un valor en dicho intervalo. Por otro lado, verifica que integrada en todo el espacio da uno. Su representación gráfica es una curva de distribución de Gauss, como muestra la figura 5, que presenta un máximo en $x=\bar{x}$, es simétrica respecto a dicho valor y posee forma de campana, y sus puntos de inflexión están en $\bar{x}\pm\sigma$.

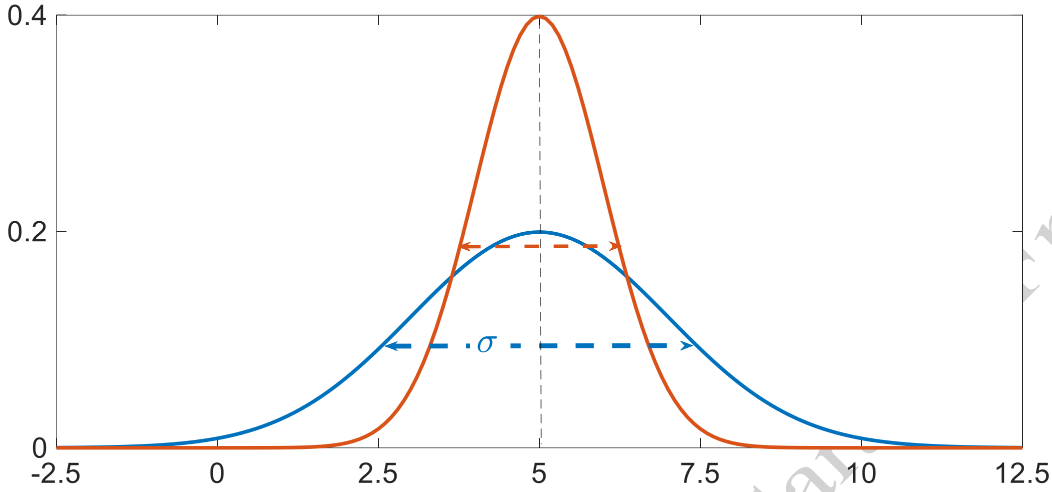


Figura 5. Dos representación de distribución de Gauss de una variable.

En resumen, si bien no es imposible predecir un valor exacto que resultará de una medición dada, podemos decir algo sobre la probabilidad de que dicho valor esté comprendido en un intervalo dado. La predicción de estas probabilidades es la utilidad fundamental de la función de gauss.

La probabilidad de que un valor caiga entre $\bar{x}-\sigma$ y $\bar{x}+\sigma$ es del 68%, entre $\bar{x}-2\sigma$ y $\bar{x}+2\sigma$ es del 95.4%, y entre $\bar{x}-3\sigma$ y $\bar{x}+3\sigma$ es de 99.72%.

La distribución gaussiana permite utilizar un criterio físico para rechazar un dato sospechoso. Si los valores medidos difieren del valor promedio más de 3σ, de acuerdo con la función gaussiana, la probabilidad de que un dato caiga fuera de dicho intervalo es de 0.28%, es decir que entre 1000 datos se esperan solo 3 fuera del intervalo. Si el número de datos obtenidos es menor y se encuentran datos fuera de dicho intervalo, los mismos pueden ser descartados atribuyéndolos a errores externos, no aleatorios.

Otro criterio (que no se empleará en el curso) es fijando en cada serie de medidas un límite de confiabilidad, y cualquier dato que caiga fuera del intervalo dado por este límite debe ser rechazado.

Para fijar el límite se impone que la probabilidad gaussiana para que un dato caiga fuera de $\bar{x}\pm K$ sea mucho menor a $1/N$ (probabilidad de un dato).

$$1-\int_{x-K}^{x+K}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left(-\frac{\left(\bar{x}-x\right)^{2}}{2\sigma^{2}}\right)dx \ll \frac{1}{N} \qquad (25)$$

Ahora podemos interpretar a la incertidumbre estándar del promedio E como aquel que determina el intervalo alrededor del promedio $\bar{x}\pm\sigma$ dentro del cual el verdadero valor de la magnitud está comprendido con una probabilidad del 68%.

No en todos los procesos de medición los datos se distribuyen de acuerdo a una curva de Gauss. Muchas veces, errores sistemáticos u otras condiciones físicas distorsionan la distribución de Gauss, generando distribuciones asimétricas o introduciendo cortes en sus extremos. La forma cualitativa más simple para verificar si una distribución dada de datos es gaussiana, es comparar el histograma obtenido con la curva de gauss teórica correspondiente.

Para ello se deben tener ciertos cuidados, como en la elección de Δx debe ser lo más pequeño posible pero comprendiendo un gran número de datos. Se debe normalizar el histograma (área=1), graficando $(dn/dx)/N$ para que sea comparable a la función de distribución.

7. CRITERIOS A SEGUIR

En esta sección daremos los criterios a seguir en este curso.

La incertidumbre asociada a un mensurando siempre está dada por la ecuación (1)

$$\delta x = \sigma_{efectiva} = \sqrt{\sigma_{est}^2 + \sigma_{nom}^2}$$

y siempre su resultado final debe ser expresado con dos cifras significativas.

Una de las posibles componentes de la incertidumbre nominal es la incertidumbre instrumental (σ_{ap}) que debe ser consistente con la apreciación o estimación del intrumento analógico empleado para determinar el valor del mensurando. En el caso de un instrumento digital se debe consultar su manual.

Cuando se realiza una serie de medidas de un mensurando, donde su histograma permite evidenciar que presenta una distribución gaussiana, la incertidumbre asociada a la estadística, σ_{est}, esta dada por la ecuación (18).

En ciertas ocaciones se posee una colección de datos que no poseen la misma incertidumbre nominal, por ende, se tiene diferentes incertidumbres asociadas a la misma magnitud. ¿Cómo expresar un resultado de la forma "*valor más representativo ± incertidumbre*"? En el trasfondo de la cuestión subyace el problema de no conocer la ley de distribución que presenta la incertidumbre de la magnitud, aunque se conozca la ley de distribución de la magnitud.

Supongamos que se tiene una serie de medidas sobre de una magnitud indirecta x, obteniendo los resultados $\{x_1 \pm \delta x_1, x_2 \pm \delta x_2, \cdots, x_N \pm \delta x_N\}$. Supongamos además que el método de medición arrojó algunas de las incertidumbres o todas, distintas entre sí ($\delta x_i \neq \delta x_j$, para algún *i,j*). Si bien el promedio $\bar{x}$ de la serie $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ es el valor más representativo de la magnitud, surge la pregunta: ¿Cómo expreso la incertidumbre asociada al valor promedio?, ¿empleo la desviasión estándar σ de dicha serie $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ o la desviación estándar del promedio σ_x en la ecuación (1)? La respuesta no resulta ser trivial. Una vez más, no existe un criterio universal para el tratamiento de los errores para esta situación, y mencionamos a continuación un posible criterio a seguir.

Comencemos recordando que si las medidas del mensurando presentan una distribución normal, en el intervalo $(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$, idealmente caen aproximadamente un 95% de las medidas. Además, la incertidumbre mayor asociada a cada una de las medidas es $\Delta_M = \max\{\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_N\}$. Luego de descartar medidas espurias (es decir, descartando valores muy alejados del promedio), esperamos que las medidas no estén muy alejados entre sí, y es esperable que una cantidad importante de los datos (como ser el 90% de ellos) se encuentren concentrados en el intervalo $(\bar{x} - \Delta_M, \bar{x} + \Delta_M)$. Por lo tanto, en caso de que el procedimiento de medición sea el apropiado, se espera que se verifique $\Delta_M \langle 2\sigma$. Entonces, se puede utilizar como medida de la incertidumbre estadística del promedio a σ, es decir, $\bar{x} \pm \sigma$ pero luego se debe analizar si se verifica que $\Delta_M \langle 2\sigma$. En caso de que no se verifique, debemos decir que el método de medición no fue el apropiado para el experimento, ya que la incertidumbre asociada a la precisión con que se toma cada medida es demasiado grande, indicando que el intervalo de datos que puede tomar $(x_i \pm \delta x_i)$ es grande, comparado con el intervalo de valores en el que se esperan tener concentradas las medidas $(\bar{x} \pm 2\sigma)$.

Como expresión final del *valor más representativo ± incertidumbre*", al considerar el método experimental y la estadística, es:

$\bar{x} \pm \sqrt{\sigma^2 + \sigma_{nom}^2}$ en el caso de que tener las medidas todas las incertidumbres iguales, $\delta x_i = \delta x_j = \sigma_{nom}$

$\bar{x} \pm \sqrt{\sigma^2 + \Delta_M^2}$ en el caso de que tener alguna de las medidas incertidumbres diferentes $\delta x_i \neq \delta x_j$ (o sea $\sigma_{nom_i} \neq \sigma_{nom_j}$).

Se considera este mismo análisis también válido para el caso en que la distribución los datos no sea necesariamente una distribución normal.

Bibliografia

P. Bevington, D. Robinson, *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, Ed. McGraw-Hill. ISBN 0-07-247227-8

J. Roederer, *Mecánica elemental*. Ed. EUDEBA ISBN 9789502312255

S. Gil y E. Rodríguez, *Física Recreativa*, Ed. PRENTICE HALL ISBN 9789879460184

Tabla de contenido