Movimiento de rodar sin deslizar en un plano inclinado

El objetivo de esta práctica es estudiar el movimiento de un cuerpo a lo largo de un plano inclinado. En particular, cuando se liberan simultáneamente del reposo un cilindro y un aro, se quiere determinar cuál de los dos cuerpos alcanzaría primero la parte inferior de la rampa sabiendo que tienen la misma masa y el mismo diámetro: ¿será el cilindro sólido o el aro?


Foto cortesía de Arbor Scientific

Para decidir, se debe considerar la inercia rotacional de cada objeto y cómo la inercia afecta el movimiento.

Se analizará la relación existente entre la aceleración angular del sólido y la lineal de su centro de masas y las condiciones que debe cumplir la inclinación del plano si no se quiere que el cilindro empiece a deslizar.

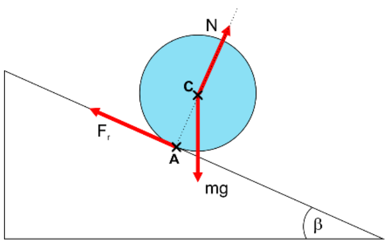
El papel que juega la fuerza de rozamiento determina el tipo de movimiento final del cuerpo en cuestión:

- Es necesaria la existencia de una fuerza de rozamiento para que el cuerpo ruede sin deslizar, pero dicha fuerza no realiza un trabajo neto, por lo que la energía mecánica se conserva.
- En el caso en el que exista un movimiento de rodar con deslizamiento, la naturaleza de la fuerza de rozamiento cambia de estática a cinética y realiza un trabajo que se transforma en una disminución de la energía final del cuerpo.

Movimiento de rodar sin deslizar

Relación entre aceleraciones

Dado un cilindro que desciende rodando, el movimiento es plano y podemos representarlo como un círculo que rueda por una línea inclinada. Sea C el centro del disco y A el punto de contacto del disco sobre el suelo en un instante dado. La velocidad de A se puede escribir como



$$\vec{v}_A = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \overrightarrow{CA}$$

Tomando un sistema de ejes en el que X es en la dirección de avance paralela al plano, Y es ortogonal a éste y Z el eje perpendicular a ambos (perpendicular al plano de movimiento y hacia afuera del papel o pantalla), estos vectores se pueden escribir como

$$\vec{v}_c = v_c \vec{\imath} \qquad \vec{\omega} = -\omega \vec{k} \qquad \overrightarrow{CA} = -R\vec{\jmath}$$

podemos rescribir la velocidad en el punto A de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{v_A} = v_c\vec{\imath} + (-\omega\vec{k})\times(-R\vec{\jmath}) = \left(v_c - \omega R\right)\vec{\imath}$$

Puesto que el cilindro rueda sin deslizar, la velocidad del punto de contacto es nula:

$$v_A = 0 \Rightarrow v_C = \omega R$$

Esta relación se cumple en todo instante, entonces podemos derivarla respecto al tiempo y obtener

$$a_C = \dot{v}_C = \dot{\omega}R = \alpha R$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente relación entre aceleraciones:

$$a_c = \alpha R \qquad \text{pero} \qquad \vec{a}_c \neq \vec{\alpha}R$$

La relación de proporcionalidad es entre módulos, no entre vectores, pues apuntan en direcciones diferentes.

Aceleración del CM

El valor de la aceleración lo podemos obtener a partir de las fuerzas o mediante razonamientos energéticos.

Ecuaciones de la dinámica

Examinaremos el movimiento de un cilindro (macizo homogéneo o hueco) de masa m y radio R que rueda sin deslizar por un plano inclinado un ángulo β. El coeficiente de rozamiento estático entre el plano y el cilindro es μ. El rozamiento por rodadura es despreciable.

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son:

- el peso
- la reacción del plano inclinado
- la fuerza de rozamiento en el punto de contacto entre la rueda y el plano.

Descomponemos el peso en una fuerza a lo largo del plano y otra perpendicular al plano inclinado. Las ecuaciones del movimiento son la siguientes:

- Movimiento de traslación del CM.

$$mg\sin\beta - F_r = ma_c$$

- Movimiento de rotación alrededor de un eje que pasa por el c.m.

$$F_r R = I_c\alpha$$

- Relación entre el movimiento de traslación y rotación (rueda sin deslizar)

$$a_c = \alpha R$$

Si conocemos el ángulo de inclinación β y el momento de inercia Ic del cuerpo que rueda, calculamos ac y el valor de la fuerza de rozamiento Fr.
Expresamos el momento de inercia $Ic = k\, mR^2$ donde k es un factor geométrico, 1/2 para el cilindro y 1 para el aro.

$$a_c = \frac{g \sin\beta}{1+k} \qquad Fr = k\frac{mg\sin\beta}{1+k}$$

Si deseamos calcular la velocidad del cuerpo después de haber recorrido una longitud x a lo largo del plano inclinado, partiendo del reposo, empleamos las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

$$x = \frac{1}{2}a_c t^2 \qquad v_c = a_c t$$

La velocidad final v_c del c.m. del cuerpo al llegar al final del plano inclinado es

$$v_c^2 = 2a_c x = \frac{2g\sin\beta}{1+k}x = \frac{2gh}{1+k}$$

Siendo h la altura de partida del cuerpo referida a la posición final, $h = x\sin\beta$

A partir de la energía

A la expresión de la aceleración del centro de masa, a_c, se puede llegar aplicando la ley de conservación de la energía mecánica. Puesto que las fuerzas no conservativas no realizan trabajo (se aplican en el punto de contacto A, cuya velocidad es nula) se conserva la suma de energía cinética y potencial

$$K + U = E$$

siendo la energía cinética suma de la de traslación y de la de rotación

$$K = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$$

Sustituyendo las relaciones entre las diferentes cantidades

$$K = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}kmR^2\left(\frac{v_c}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}(1+k)mv_c^2$$

Para la energía potencial, midiendo la altura desde el punto más bajo del plano

$$U = mgh' = mg\left(h - x\sin\beta\right)$$

con x la distancia medida sobre el plano. Por tanto, tenemos la relación

$$\frac{1}{2}(1+k)mv_c^2 + mg\left(h - x\sin\beta\right) = mgh$$

Derivando aquí respecto al tiempo

$$\frac{1}{2}(1+k)m\left(2v_c\frac{dv_c}{dt}\right)-mg\frac{dx}{dt}\sin\beta=0$$

Como $v_c = dx/dt$ y $a_c = dv_c/dt$, esto equivale a

$$v_c\left[(1+k)ma_c - mg\sin\beta\right]=0$$

Puesto que se anula y la velocidad no es nula, hallamos la aceleración

$$a_c=\frac{g\sin\beta}{1+k}$$

Condición sobre el rozamiento

A partir de la expresión de la aceleración, podemos calcular la fuerza de rozamiento que a partir de la segunda cardinal

$$F_r = ma_c - mg\,\mathrm{sen}(\beta)=\frac{1}{1+k}mg\,\mathrm{sen}(\beta)-mg\,\mathrm{sen}(\beta)=-\frac{k}{1+k}mg\,\mathrm{sen}(\beta)$$

Puesto que estamos en una situación de rozamiento estático, debe cumplirse la condición

$$|\vec{F}_r|\leq\mu|\vec{F}_n|$$

Sustituimos las dos fuerzas

$$\frac{k}{1+k}mg\,\mathrm{sen}(\beta)\leq\mu mg\cos(\beta)$$

que nos da la condición geométrica

$$\mathrm{tg}(\beta)\leq\frac{1+k}{k}\mu$$

que para el caso de un cilindro macizo da

$$\mathrm{tg}(\beta)\leq 3\mu$$

Es decir, hay que inclinar mucho más el plano en el caso de un cilindro que en el caso de un bloque para conseguir que deslice.