Práctica 6

Péndulo físico

El concepto de péndulo físico aparece como un tema de la dinámica del cuerpo rígido que involucra los conceptos de centro de masa, momento de inercia y la Segunda Ley de Newton aplicada a un sistema continuo en rotación, los cuales se integran a un concepto singular como son las oscilaciones armónicas.

Un problema de resolución que se presenta reiteradamente en libros de física general consiste en determinar cómo varía el período de dos sistemas: de un péndulo formado por una varilla, y el de la misma varilla con una pequeña masa adosada, la cual puede ubicarse a una distancia variable del eje de suspensión del sistema. Para ambos sistemas el eje se encuentra ubicado en la parte más alta de la varilla. Nuestra primera realización se muestra esquemáticamente en la Figura 1.

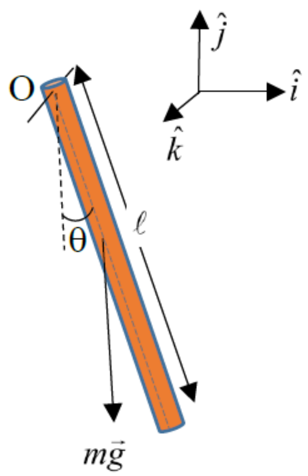

Figura 1. Varilla de longitud *l* suspendida de un extremo (“O”), separada de la vertical un ángulo θ.

En el punto O (eje de giro de la varilla) el torque total, asumiendo rozamiento nulo, es

$$\sum \vec{\tau}_O = I_{eje}\vec{\alpha}$$

donde α es la aceleración angular del sistema, I_{eje} el momento de inercia de la varilla respecto al eje de giro “O”. El torque total está dado por la única fuerza actuante, peso de la varilla, y vale

$$\sum \vec{\tau}_O = -mg\frac{\ell}{2}sen\theta\,\hat{k}$$

siendo m la masa de la varilla, l la longitud de la varilla, y Θ la variable angular.

Considerando las ecuaciones y se obtiene

$$I_{eje}\alpha = -mg\frac{\ell}{2}sen\theta$$

En el caso que los desplazamientos angulares sean pequeños, tales que nos permita aproximar $sen(\theta) \simeq \theta$[1] la ecuación se reescribe como

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{2I_{eje}}\theta = 0$$

La ecuación describe la ecuación de un oscilador armónico simple cuya frecuencia angular está dada por

$$\omega_{arm}^2 = \frac{mg\ell}{2I_{eje}}$$

El período del péndulo puede obtenerse con la expresión general para el caso de pequeñas amplitudes de oscilación y rozamiento despreciable:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{eje}}{mg\,\ell/2}}$$

En el caso que se adicione al sistema una masa puntual, M, en la posición x (Fig. 2), la distancia entre el centro de masa del péndulo y el eje de suspensión, el centro de masa viene dado por:

$$d = \frac{m\frac{\ell}{2} + Mx}{M+m}$$

[1] La aproximación es válida cuando el error relativo de truncamiento es mucho menor que las incertidumbres relativas asociadas a los mensurandos involucrados.

En este péndulo compuesto, el momento de inercia del sistema, I_{eje}, es la suma de los momentos de inercia de la barra I_{barra} y de la masa I_m con respecto al eje de suspensión:

$$I_{eje} = I_{barra} + I_M$$

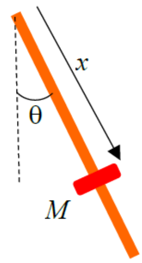

Figura 2. Varilla suspendida de un extremo junto con una masa M, al separarse de la vertical un ángulo θ oscilan en el plano de la hoja.

El I_{barra} viene dado por

$$I_{barra} = \frac{1}{3} m \ell^2$$

donde se ha aplicado el teorema de ejes paralelos y se ha considerado la varilla homogénea (con una distribución de masa uniforme) y que el centro de masa se ubica a la mitad de su longitud. Por otro lado, al considerar la masa móvil puntual[2] su momento de inercia viene dado por

$$I_m = M x^2$$

Considerando las expresiones anteriores el período de oscilación queda:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3} m \ell^2 + M x^2}{(M+m) g d}}$$

[2] La masa agregada en el experimento, ¿es más parecida a una masa puntual o a un cilindro ahuecado?, ¿cómo expresaría el momento de inercia de la masa agregada?

Procedimiento

El objetivo de esta práctica es determinar el momento de inercia de un sistema compuesto por cuerpos rígidos mediante el análisis experimental de la dinámica del cuerpo rígido.

a. Determine, a partir de su expresión teórica, el momento de inercia de la varilla mediante la medición de su masa y longitud, su eje de oscilación está ubicado en un extremo de la misma.
b. Determine, a partir de su expresión teórica, el momento de inercia de la masa, considerada puntual, que se encuentra a una distancia dada del eje de giro de la varilla.
c. Determine, a partir de su expresión teórica, el momento de inercia del sistema formado por varilla y masa. El eje de oscilación está ubicado en un extremo de la varilla.
d. (Opcional) Si se considera, en lugar de la masa puntual, la real distribución de masa, determine el momento de inercia del sistema.

A partir de las medidas del período de oscilación:

e. Determine el momento de inercia de la varilla (sin masa agregada).
f. Determine el momento de inercia del sistema formado por la varilla y masa (para una única posición de la masa).

En los puntos e y f, calcule el error de modelo experimental.

g. Grafique el período de oscilación en función de la posición de la masa.
h. Cambie de masa, superponga al gráfico anterior el período de oscilación en función de la posición del nuevo sistema. Encuentra la posición donde el periodo del sistema es independiente de la masa. Para ese período, ¿cuál sería la longitud equivalente de un péndulo simple?