Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Álgebra Lineal II
Segundo semestre 2023

Examen. Diciembre 2023.

1. Se construye una sucesión de palabras con las letra a y b, empezando con la palabra a, y en cada paso aplicando las substituciones $a \mapsto aaab$ y $b \mapsto aaaaabb$.

   La sucesión empieza
   $$a \mapsto aaab \mapsto aaabaaabaaabaaaaabb \mapsto \cdots .$$

   Sea a_n y b_n el número de veces que aparece la letra a y b respectivamente en la n-ésima palabra de la sucesión (de modo que $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 14, \ldots$ y $b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 5, \ldots$).

   Dar una fórmula explícita para a_n y b_n justificando su razonamiento.

2. Dados $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ se define la matriz de Gram asociada como la matriz G cuyas entrada i, j es $\langle v_i, v_j \rangle$ donde $\langle\ ,\ \rangle$ es el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$. En otras palabras $G = A^t A$ donde A es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ en la base canónica.

   a) Mostrar que G es invertible sí y sólamente sí $v_1, \ldots, v_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

   b) Mostrar que toda matriz de Gram es diagonalizable y tiene valores propios no negativos.

   c) Si G es una matriz de Gram invertible mostrar que existe una única matriz $G^{1/2}$ simétrica con los mismos vectores propios que G y con valores propios positivos cuyo cuadrado vale G.

3. Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita, con producto interno, y $U : V \to V$ un operador unitario (i.e. $U^{-1} = U^*$ donde U^* es la adjunta de U).

   Demostrar que para todo $v \in V$ se cumple
   $$\pi(v) = \lim_{n \to +\infty} \frac{v + Uv + \cdots + U^n v}{n},$$
   donde $\pi : V \to V$ es la proyección ortogonal sobre el subespacio propio de U de valor propio 1.