

PRÁCTICO 1

Sucesiones y series de funciones

1. Determinar cuáles de las siguientes funciones convergen puntualmente o uniformemente. Estudiar la continuidad de la función límite en cada caso.

$$\begin{array}{ll} \blacksquare f_n(x) = \frac{\text{sen}(x)}{n} \text{ con } x \in \mathbb{R}. & \blacksquare f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1/n \\ 1 - nx & 0 \leq x \leq 1/n \\ 1 + nx & -1/n \leq x \leq 0 \end{cases} \\ \blacksquare f_n(x) = \frac{1}{nx+1} \text{ con } x \in (0, 1). & \\ \blacksquare f_n(x) = \frac{x}{nx+1} \text{ con } x \in (0, 1). & \\ \blacksquare f_n(x) = \frac{x}{(x+1)^n} \text{ con } x \in [1, 2]. & \blacksquare f_n(x) = x^n \text{ con } x \in [0, 1]. \end{array}$$

2. Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = x/n$ converge uniformemente en cualquier intervalo compacto. ¿Es uniformemente convergente en \mathbb{R} ?

3. Consideremos la sucesión de funciones (f_n) en \mathbb{R} , dada por $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}$.

- a) Calcular los límites puntuales de las sucesiones f_n y f'_n , a los que llamaremos f y g .
b) Mostrar que f_n converge a f uniformemente.
c) Probar que existe $f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ pero $f'(0) \neq g(0)$.

4. Sea $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1 - nx)^2}$ con $x \in [0, 1]$, $n \geq 1$. Probar que $f_n \rightarrow 0$ puntualmente pero no existe ninguna subsucesión de (f_n) que converja uniformemente.

5. Considérese la sucesión $f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$ para $x \in [0, 1]$. Determinar el límite puntual de (f_n) . Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$, y concluir que la convergencia de (f_n) no es uniforme.

6. Sea $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\cos n! \pi x)^{2k}$. Probar que existe el límite puntual de f_n pero no es integrable Riemann (sugerencia: dividir en dos casos, según x sea o no racional).

7. Sea (f_n) una sucesión de funciones definidas en \mathbb{N} , tal que para cada n existe $L_n := \lim_k f_n(k)$. Supóngase que (M_n) es tal que $|f_n(k)| \leq M_n, \forall n, k$, y que $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$. Sea $F(k) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(k)$. Probar que $\lim_k F(k) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n$.

8. Supongamos que $\sum n|b_n|$ es convergente, y definamos $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } nx, \forall x \in \mathbb{R}$. Probar que f es una función de clase C^1 en \mathbb{R} , y expresar su derivada como la suma de una serie.

9. Supongamos que $(f_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de funciones definidas en $[0, 1]$ y tales que para cierta constante $L \geq 0$ se tiene $|f_n(x) - f_n(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in [0, 1], n \geq 1$ (es decir: cada f_n es de Lipschitz con la misma constante L). Mostrar que si (f_n) converge puntualmente a f , entonces la convergencia es uniforme y f también es de Lipschitz. ¿Qué sucede si la constante de Lipschitz depende de n ?

10. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+nx^2)\sqrt{n}}$.
11. Probar que existen funciones continuas que no son derivables en ningún punto (sugerencia: considerar $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ donde φ es una función 2-periódica que cumple $\varphi(x) = |x|$ si $x \in [-1, 1]$).
12. En cada uno de los siguientes casos, investigar el comportamiento (convergencia o divergencia) uniforme de (f_n) en los conjuntos indicados:

- a) $f_n(z) = \frac{1}{1+nz}$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| \geq 2$. d) $f_n(x) = \frac{n^3 x}{1+n^4 x}$, $x \in [0, 1]$.
- b) $f_n(z) = \frac{1}{1+nz}$, $|z| \leq 2$, $z \neq \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$. e) $f_n(x) = \frac{n^3 x}{1+n^4 x^2}$, $x \in [a, +\infty)$, $a > 0$.
- c) $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, $x \in [0, 1]$. f) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \in [0, 1]$.

13. Para $n \geq 1$ consideremos $f_n(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ e^{-2n}(e^n + n - x) & \text{si } n \leq x \leq n + e^n \\ 0 & \text{si } x \geq n + e^n \end{cases}$

- a) Calcular el límite puntual f de la sucesión (f_n) , y mostrar que la convergencia es uniforme.
- b) Calcular $\int_0^{\infty} f(x)dx$ y $\lim_n \int_0^{\infty} f_n(x)dx$. ¿Moraleja?

14. Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias. En cada caso, intentar ver el comportamiento en el borde del intervalo de convergencia.

- a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$
- b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$
- c) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$ i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} x^n$

15. Considérese la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-7}{x+1}\right)^n$, para $x > 3$. Encontrar el límite, y hallar todos los conjuntos en los cuales la convergencia es uniforme.

16. Calcular, justificando: (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+n^2}{2^n}$. (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$ (recordar que $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$).

17. La función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ satisface la ecuación diferencial $f''(x) - f(x) = 0$, con $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$. Calcular a_n .

18. Sea $\operatorname{Si} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Si}(x) := \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$. Probar que $\left| \operatorname{Si}(1) - \sum_{n=0}^6 \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} \right| < \frac{1}{35.000}$.