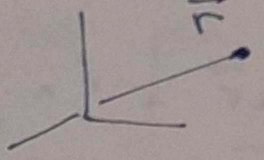
* Fundamentos de la mecánica.

1.1 Mecánica de la partícula. Sea una partícula de masa m. Partimos de un sistema de coordenadas y un radio vector $\vec{r}$



$\vec{r}(t)$, definimos $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

y el momento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$

La partícula está sujeta a diferentes fuerzas $\vec{F}$

La 2da ley de Newton contiene casi todo lo que tenemos que saber. Sabemos que existen sistemas de referencia en que

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

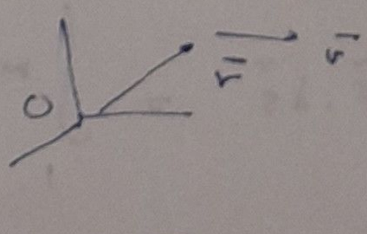
si $m = cte \Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Los sistemas donde vale esto se denominan inerciales, la Tierra puede ser uno según el experimento que tengamos.

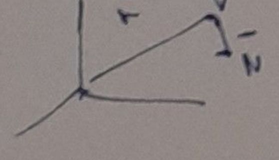
* Leyes de conservación si $\vec{F} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{p}} = 0 \Rightarrow \vec{p} = cte$

* Definimos momento angular $\vec{L}$ respecto al punto O

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$$



* Torque o momento de una fuerza $\vec{N} = \vec{r} \wedge \vec{F}$



Usando la ec. de movimiento

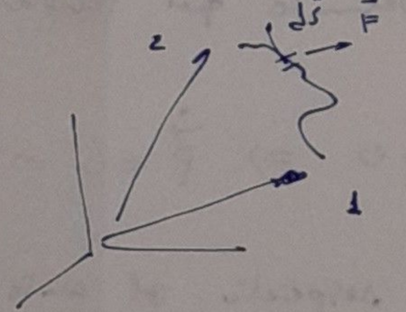
$$\underbrace{\vec{r} \wedge \vec{F}}_{\vec{N}} = \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v})}_{\frac{d}{dt}\vec{L}}$$

observemos $\frac{d}{dt}(\vec{r} \wedge m\vec{v}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \wedge m\vec{v}}_{=0} + \vec{r} \wedge \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{N} = \dot{\vec{L}}}$$

* Teorema de conservació si $\vec{N} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$

Trabajo hecho por la fuerza externa $\vec{F}$ sobre la partícula al ir del punto 1 al 2



$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \underbrace{d\vec{s}}_{\vec{v}\,dt} = \int_1^2 \underbrace{m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v}\, dt}_{\frac{m v^2}{2}} = \frac{m}{2} v^2 \Big|_1^2$$

$$W_{12} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

Definimos energía cinética $T = \frac{m}{2} v^2$

$$\boxed{W_{12} = T_2 - T_1}$$

Vale para cualquier fuerza.

Decimos que un campo de fuerzas es conservativo si W_{12} es independiente del camino.

En ese caso $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$, en ese caso podemos definir $\vec{F} = -\nabla V(r)$, $V(\vec{r})$ potencial, energía potencial

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_1^2 \nabla V(\vec{r})\, ds = -\left[V(2) - V(1) \right]$$

pero $W_{12} = T_2 - T_1 = -V_2 + V_1 \Rightarrow$

$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1$$

Teorema de conservación de la energía para una partícula

$T + V = cte$ si las fuerzas son conservativas

Mecánica de sistemas de partículas

Ahora hacemos la distinción entre fuerzas internas y externas

$\vec{F}_{ji}$ es la fuerza sobre la $\underline{i}$ debido a la partícula $\underline{j}$

$F_i^{(e)}$ es la fuerza externa sobre la $\underline{i}$

$$\dot{\vec{P}}_i = \sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)}$$

Suponemos $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$ (principio débil de acción y reacción)

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{(e)}}_{\vec{F}^{(e)}} + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{F}_{ji}}_{=0}$$

$= 0$ pq $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

Definimos $\vec{R} = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \dfrac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$ centro de masas

$$\Rightarrow \boxed{M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{F}^{(e)}}$$

- El centro de masas se mueve como una partícula M sujeta a $\vec{F}^{(e)}$
- Las $\vec{F}_{ij}$ no tienen efecto (ejemplo granada explota)

Definimos $\vec{P} = \sum m_i \dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = M \dfrac{d\vec{R}}{dt}$, vemos que $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{(e)}$

teorema de conservación:

Si $\vec{F}^{(e)} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{cte}$

Momento angular respecto a O

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$$

Derivando $$\dot{\vec{L}} = \underbrace{\sum_i \dot{\vec{r}}_i \wedge \vec{p}_i}_{=0} + \sum_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{p}}_i$$

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \left(\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_{ji} \right)$$

$$\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{N}^{(e)}}$$

El 2do término vale cero si

$$\vec{r}_i \wedge \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \wedge \vec{F}_{ij}$$

$$\left(\vec{r}_i - \vec{r}_j \right) \wedge \vec{F}_{ji} \quad \text{si} \quad \vec{F}_{ji} \parallel \vec{r}_j - \vec{r}_i$$

decimos que se verifica el principio de acción reacción fuerte.

Teorema de conservación:

si $\vec{N}^{(e)} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}$

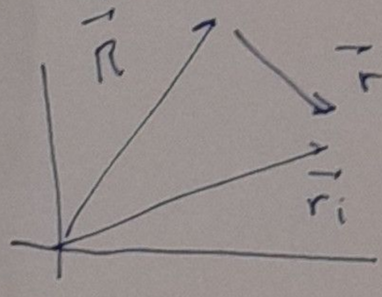
Vimos que $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ el momento lineal total

$$= M \dot{\vec{R}}$$

es igual a una masa M que se mueve con el baricentro

Será cierto para $\vec{L}$? → no

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$$



$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i\,'$$

$\vec{r}_i\,'$ es la posición respecto al centro de masas

Es fácil ver que $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{V}$ con $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$ y $\vec{v}'_i = \frac{d\vec{r}'_i}{dt}$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i$$

$$\vec{L} = \sum_i (\vec{r}'_i + \vec{R}) \wedge (m_i \vec{v}'_i + m_i \vec{V})$$

$$= \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}'_i + \underbrace{\sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{V}}_{\left(\sum m_i \vec{r}'_i\right) \wedge \vec{V} \,=\, 0} + \overbrace{\sum_i \vec{R} \wedge m_i \vec{v}'_i}^{=0} + \sum_i \vec{R} \wedge m_i \vec{V}$$

$$\boxed{\vec{L} = \sum_i \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}'_i + \vec{R} \wedge M \vec{V}}$$

Moment angular respecto a O

Moment angular respecto a G

Partícula de masa M que se mueve con el c. de m.

Energía en un sistema de partículas

Consideramos ahora que todo el sistema pasa de una configuración 1 a en 2, calculamos el trabajo de todas las fuerzas

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i$$

$$= \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i^{(e)} \cdot d\vec{s} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \int_1^2 \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}$$

Usando $\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$, obtenemos $W_{12} = \sum_i \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$

$$W_{12} = \sum_i m_i \int_1^2 \dot{\vec{v}}_i \cdot \vec{v}_i \, dt = \sum_i \int_1^2 d\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$$

$$W_{12} = T_2 - T_1$$

Energía cinética. Probar que se puede poner como la energía del centro de masas + la energía alrededor del centro de masas.

Energía como si todo tuviera una partícula de masa M siguiendo el c. de m.

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{v} + \vec{v}_i')(\vec{v} + \vec{v}_i')$$

$$= \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2 + \frac{1}{2} M v^2 + \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}}_{= 0}$$

2 - Vínculos y formulación Lagrangiana

$\boxed{2.1}$ - Vínculos. A partir de las consideraciones anteriores se podría pensar que todos los problemas se reducen a resolver el conjunto de ODEs

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{(e)} + \sum_j \vec{f}_{ji}$$

Esto no es cierto porque casi siempre hay restricciones o vínculos aplicados por agentes externos. Muchas veces se conoce el efecto geométrico o su efecto combinado con fuerzas conocidas

Ejemplos - Cuerpo rígido

- Partícula sobre una curva

- Rodadura

Si el vínculo se expresa $f(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_n, t) = 0$ es holónomo (integrables)

En caso contrario $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \ldots, t) = 0$ es no holónomo

Algunos vínculos se pueden expresar con desigualdades

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots) \geq 0$$

en este caso se denominan unilaterales (en contraposición con los bilaterales).

También se clasifican según haya dependencia explícita del tiempo $\longrightarrow$ esclerónomos (no dep expl del tiempo)

$\hookrightarrow$ reónomos (dependen)

Los vínculos introducen dos dificultades

a) Las ec. de movimiento dejan de ser independientes.

b) Las fuerzas de los vínculos no son conocidas a priori.

* Coor. generalizadas.

2.2 Para resolver a) se introducen coordenadas generalizadas. Es un conj. de parámetros que me determina de manera unívoca la conf. de un sistema.

Si hay N partículas ($3N$ coord. cartesianas) y K vínculos $\Rightarrow$ tengo $3N - K = n$ coord. generalizadas

$$q_1, \dots q_n$$

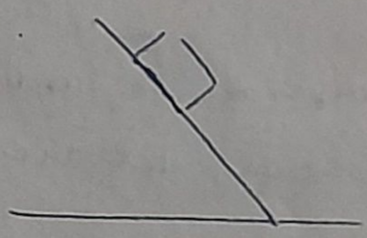
n es el nro. de grados de libertad

Se expresan

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1 \dots q_n, t)$$
$$\vdots$$
$$\vec{r}_N = \vec{r}_N(q_1 \dots q_n, t)$$

Estas coordenadas en general no son cartesianas ni se dividen en grupos de 3.

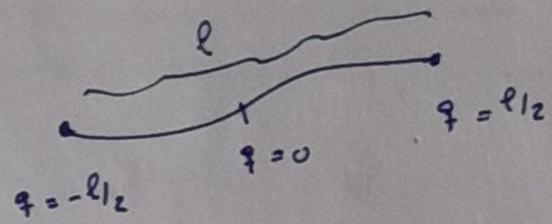
Ejemplos.



* Espacio de configuración

Espacios de Configuración Q

1 -

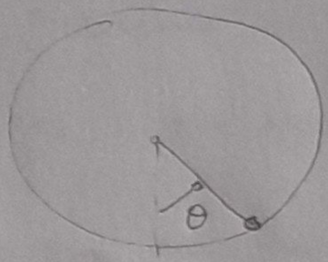


$N = 1$
$K = 2$
$n = 3 - 2 = 1$

$\dim(Q) = 1 \qquad -l/2 \leq q \leq l/2$

2 - Péndulo plano $\rightarrow$ circulo S^1

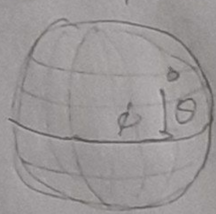
$\theta \begin{cases} [-\pi, \pi] \\ [0, 2\pi] \end{cases}$

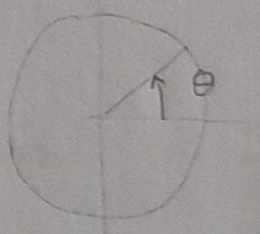


3 - Plano $\quad N = 1 \quad K = 1 \Rightarrow n = 2$

p.i $\theta = \pi/2$ cualquier ϕ

4 - Esfera S^2

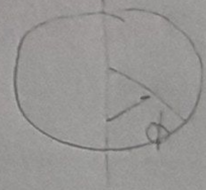




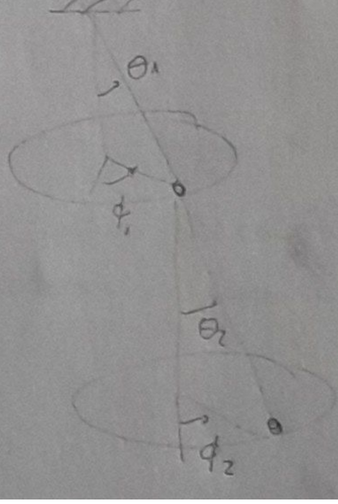
corte

Péndulo esférico

ϕ - azimut
θ ángulo polar (colatitud)



5 - Péndulo doble $\quad S^2 \times S^2$



2.3 Principio de d'Alembert.

2.3.1 - 1 partícula.

Consideremos una partícula en 3d limitada a moverse en una superficie con una fuerza externa $\vec{F}$

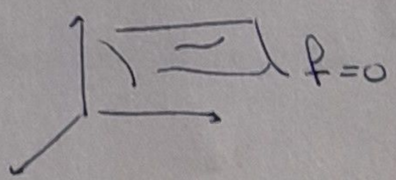
$$f(\vec{x}, t) = 0$$

Observamos que $N=1$ y $K=1$ $\Rightarrow$ 2 gr. de libertad.

Ec. de Newton $\quad m\ddot{\vec{x}} = \underbrace{\vec{F}}_{\text{F. externa}} + \vec{C} \rightarrow$ vínculo

Hay 4 ec. y 6 incógnitas, ¿qué hacemos?

Hay muchas posibles $\vec{C}$ que mantienen la partícula en la superficie



Si agregamos una fuerza // al plano del vínculo se cumple pero la aceleración será $\neq$.

Elegimos $\vec{C} \perp$ superficie $\Rightarrow$ $\vec{C} = \lambda \nabla f(\vec{x}, t)$

pedimos $\nabla f \neq 0$

Las ec. de movimiento

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}} &= \vec{F} + \lambda \nabla f \\ f &= 0 \end{aligned}}$$

Ahora tengo 4 ec. y 4 incógnitas.

Con esta elección de la fuerza estamos dejando afuera los problemas con rozamiento.

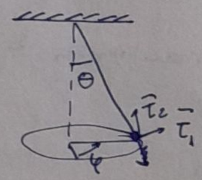
Definimos ahora un vector arbitrario $\vec{\tau}$ tangente a la superficie $\vec{\tau}\cdot\nabla f = 0$, $\vec{C}\cdot\vec{\tau} = 0$ y $\vec{C} = m\ddot{\vec{x}} - \vec{F}$

Si multiplico por $\vec{\tau}$

$$(m\ddot{\vec{x}} - \vec{F})\cdot\vec{\tau} = 0$$

como tengo 2 posibles $\vec{\tau}$ tengo 2 ecuaciones + el vínc[ulo] y 3 incognitas $\Rightarrow$ Puedo resolver el problema sin te[ner] que calcular la $\vec{C}$. (esta es la idea del principio de d'Alembert)

Ejemplo - Péndulo esférico.



Observación Trabajo y vínculos, si $\vec{F}^{(a)} = -\nabla V$

$$\frac{dV}{dt} = \nabla V\cdot\dot{\vec{x}} + \frac{\partial V}{\partial t} \qquad y \qquad f(\vec{x},t) = 0 \Rightarrow \frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\nabla f\cdot\dot{\vec{x}} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

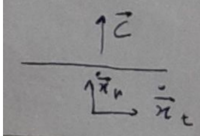
Supongamos $\vec{x}(t)$ es una solución de las ec. de mov.

[A] partir de las ecuaciones de movimiento.

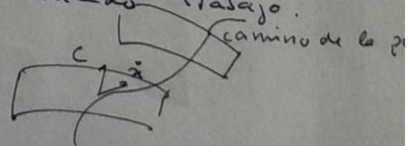
$$m\ddot{x}\,\dot{x} = -\nabla V\,\dot{x} + \lambda\nabla f\cdot\dot{x} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V\right)}_{E} = \frac{\partial V}{\partial t} + \lambda\frac{\partial f}{\partial t}$$

Si la energía está cambiando $dE/dt \neq 0 \Rightarrow$
[p]uede ser por que el pot. dep. del tiempo (muy raro) o
[por] que las fuerzas del vínculo están haciendo trabajo.



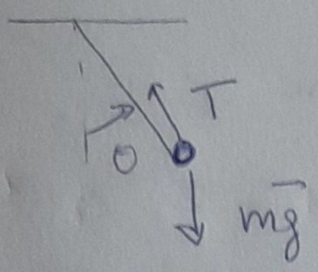
$$\vec{C}\,\dot{\vec{x}} \neq 0$$



Motivación

Consideramos un péndulo masa m, largo ℓ (plano)

Newton

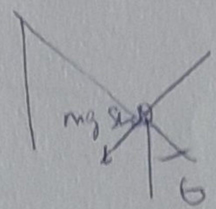


$\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_r$

$\vec{r} = \ell \hat{e}_r$

$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{T}$ Tiene 2 ecuaciones $(\hat{e}_\theta, \hat{e}_r)$ y 2 incognitas θ, T

d'Alembert: con tomar la ecuación de Newton en la dirección $\hat{e}_\theta$ alcanza



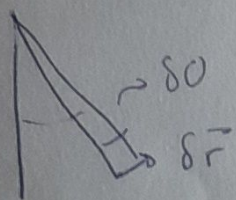
$m\ell\ddot{\theta} = -mg \operatorname{sen}\theta$

consideramos una variación en las c.g. $\delta\theta$, $\delta\vec{r} = \ell \dfrac{d(\hat{e}_r)}{d\theta}\delta\theta$

$\Rightarrow \dfrac{d(\hat{e}_r)}{d\theta} = \hat{e}_\theta \Rightarrow \delta\vec{r} = \ell\,\delta\theta\,\hat{e}_\theta$

$\downarrow$

desplazamiento virtual.

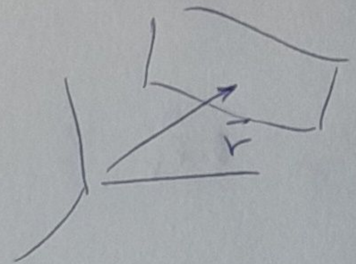


$m\ddot{\vec{r}} - m\vec{g} - \vec{T} = 0$

$(m\ddot{\vec{r}} - m\vec{g} - \vec{T})\cdot\delta\vec{r} = 0$ observamos $\vec{T}\cdot\delta\vec{r} = 0$

$\Rightarrow \boxed{(m\ddot{\vec{r}} - m\vec{g})\cdot\delta\vec{r} = 0}$ $\Rightarrow$ la componente θ de la ecuación de N pero sin $\vec{T}$

Consideremos 1 partícula en 3d limitada a moverse en una superficie $f(\vec{r},t) = 0$



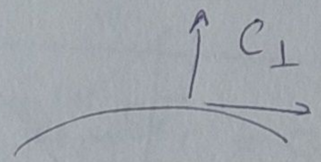
$f(\vec{r},t) = 0$

$N = 1$, $K = 1$ $\Rightarrow$ $n = 3 - 1 = 2$ g. l.

Ec. de Newton $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}^{(e)} + \vec{C}$

~~Notación~~ Hay 4 ec. y 6 incógnitas

Vínculos ideales. Aquellos que son $\perp$ a la superficie.



$C_\perp \Rightarrow$ asociada al vínculo

$C_\parallel \Rightarrow$ " al rozamiento

Elegimos $\vec{C} = \lambda \nabla f$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \lambda \nabla f$$

$$f = 0$$

Principio de d'Alembert

Tenemos $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_N$ partículas de masa m, sujetas a un conjunto de vínculos

Identificamos un conjunto de coordenadas generalizadas $q_1, \ldots q_n$ que determinan unívocamente el estado (configuración) del sistema

En general tenemos relaciones del tipo

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1, q_2, \ldots q_n, t)$$
$$\vdots$$
$$\vec{r}_N = \vec{r}_N(q_1, q_2, \ldots q_n, t)$$

Como tenemos 3N cantidades para determinar las posiciones concluimos que hay K relaciones t q

$$n = 3N - K$$

del tipo $f_1(\vec{r}_1 \ldots \vec{r}_N, t) = 0$

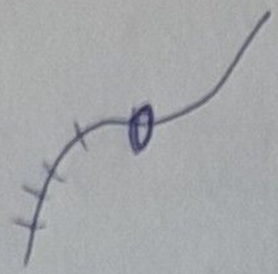
$$\vdots$$

$$f_K(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N, t) = 0$$

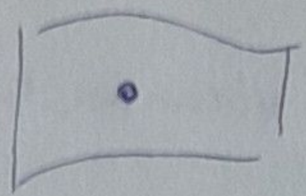
Observamos que las c.g. no tienen pq ser distancias, pueden ser ángulos, energía, velocidades, ..

El espacio de las $q_1 \ldots q_n$ se llama espacio de configuraciones. Q

Ejemplos



- Q puede ser una recta, semirecta segmento



- Partícula sobre ~~plano~~ superficie puedo definir, al menos localmente, coordenadas gen curvilíneas

Identificamos Q con $\mathbb{R}^2$

Principio de d'Alembert

Definimos desplazamiento (infinitesimal) virtual $\delta\vec{r}_i$ como un cambio en las coordenadas $\vec{r}_i$ compatibles con los vínculos en un instante dado

Si $\quad \vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1 \dots q_n, t) \Rightarrow$

$$\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\,\delta q_j$$

Newton $\quad \vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i$, descomponemos las fuerzas en $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{C}_i$

$$\sum_i (\vec{F}_i - \dot{\vec{p}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0$$

$$\sum_i (F_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i + \underbrace{\sum_i \vec{C}_i\,\delta\vec{r}_i}_{} = 0$$

Definimos vínculos ideales cuando $(\;) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_i (F_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i)\cdot\delta\vec{r}_i = 0} \qquad \text{P. de d'Alembert}$$

Observemos el caso estático

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Principio de los trabajos virtuales

Volvemos $$\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

no puedo decir que $\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i \neq 0$!!

lo que es cero es la suma pero como $\delta \vec{r}_i$ no son independientes

$$\sum_i \vec{F} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$= \sum_j \Big(\underbrace{\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}_{Q_j} \Big) \cdot \delta q_j$$

Q_j → fuerza generalizada

las dimensiones no son de fuerzas

Ecuaciones de Lagrange

Sea un sistema de partículas $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_N$ con coordenadas generalizadas $q_1, q_2, \dots q_n$, habíamos definido los desplazamientos reales

$$d\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt \quad \text{con} \quad dq_j = \dot{q}_j\, dt$$

y los desplazamientos virtuales

$$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \text{con } \delta q_j \text{ arbitrarios}$$

2 trucos

* $$\dot{\vec{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}$$

* $$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} &= \sum_j \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_k} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) &= \sum_j \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)}$$

Antes teníamos $\sum_i (F_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$ vamos a expresar esta relación en función de las q_i

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \sum_j F_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \, \delta q_j$$

Definimos la fuerza generalizada $\boxed{Q_j = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}}$ (1)

El dro miembro

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{ij} m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - \underbrace{\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}}_{\text{acá usé el 2do. truco}}$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)}_{\text{acá usé el 1er. truco.}} - \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i m_i \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{2}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\sum_i m_i \frac{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T\right) - \frac{\partial}{\partial q_j} T\right]\delta q_j \qquad (2)$$

usando (1), (2) y el hecho que las coordenadas son independientes

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, \ldots n$$

*

si el sist. es conservativo $\vec{F}_i = -\nabla_i U \Rightarrow Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$

$$\Rightarrow Q_j = -\sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \Rightarrow Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

si U no depende de $\dot{q}_j$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(T-U)\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-U) = 0 \, .$$

defino $L = T - U \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, \ldots n}$$

Obs. Potencia. Dado un conjunto de fuerzas $\vec{F}_i$ que actúan sobre partículas $\vec{r}_i$ con velocidades $\vec{v}_i$ es

$$\mathcal{P} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_i \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)$$

$$\mathcal{P} = \sum_j Q_j \dot{q}_j + \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Definimos Trabajo virtual $\delta W = \sum_j Q_j \delta q_j$

Ejercicio: Probar que en un rígido $\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{v}_0 + M_0 \cdot \vec{\omega}$ donde O es un pto del rígido.

2.5 Potenciales generalizados

* Pot. dependientes de la velocidad

Sea un potencial U tal que las fuerzas generalizadas se obtengan $U(q, \dot{q}) \Rightarrow$ a partir de

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

$\rightarrow$ El potencial puede ser incluido en el $\mathcal{L}$

Aplicación Ec de Maxwell

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \qquad \nabla \wedge \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \wedge \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

La fuerza de Lorentz

Potenciales

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \wedge \vec{B}\right), \quad \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \quad \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla\phi$$

Definimos $\quad U = q\phi - \frac{q}{c} A.\vec{v}$

La Lagrangiana de una partícula en un campo magnético se puede escribir como

$$L = T - q\phi + \frac{q}{c}\vec{A}.\vec{v}$$

* Función de disipación de Rayleigh

$$\tilde{F} = \frac{1}{2}\sum_i (k_x v_{ix}^2 + k_y v_{iy}^2 + k_z v_{iz}^2)$$

Es útil cuando hay fuerzas del tipo $F_x = -k_x v_x$

$$\Rightarrow \quad F_{fx} = -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial v_x} \qquad \text{o simbólicamente } \vec{F} = -\nabla_v \tilde{F}$$

La fuerza generalizada es

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_{if} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum \nabla_v \tilde{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum \nabla_v \vec{F} \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

$$Q_j = -\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{q}_j}$$ Se puede integrar en el Lagrangiano si

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Ejemplo

1- Partícula en coordenadas polares (2d) sometida a una fuerza $\vec{F}$

$q_1, q_2 \rightarrow \theta, r$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$\hat{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$$Q_\theta = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} \qquad \vec{r} = r\hat{e}_r \qquad \hat{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta) = \hat{e}_\theta$$

$$Q_\theta = F_\theta\, r$$

$$Q_r = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = F_r$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = m r^2\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}$$

$$\boxed{2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = rF_\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r}$$

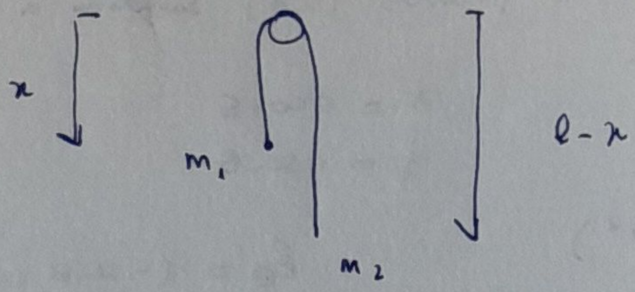
↓

Newton según $\hat{e}_r$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta$$

Obs $\boxed{\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = rF_\theta}$ 2da. cardinal

Ejemplo 2 Máquina de Atwood



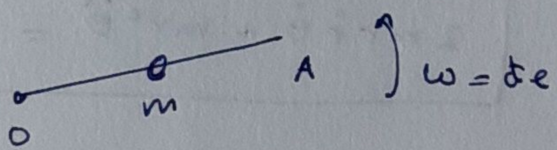
$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}^2 = \frac{m_1+m_2}{2}\dot{x}^2$$

$$V = -m_1 g x - m_2 g (l-x) = (m_2 - m_1) g x - m_2 g l$$

$$\frac{m_1+m_2}{\blacksquare}\ddot{x} - (m_1 - m_2) g = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g}$$

Ejemplo 3



$x = r\cos\omega t$

$y = r\sin\omega t$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\omega t - r\omega\sin\omega t$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\omega t + r\omega\cos\omega t$$

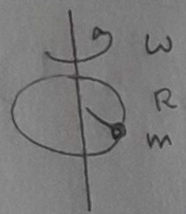
$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + w^2 r^2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r} \qquad \frac{\partial L}{\partial r} = m w^2 r$$

$$\boxed{m\ddot{r} - m w^2 r = 0}$$

Ejemplo

Una masa se desliza sin fricción bajo la acción de la gravedad en un aro circular que gira con vel. angular $\omega = cte.$ alrededor de un diámetro vertical.

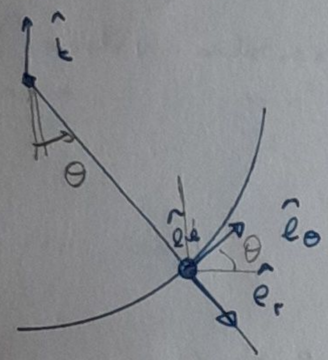


a) L

b) Posiciones de equilibrio

c) Frecuencias de las $\underbrace{\text{posiciones de eq. estable}}_{\text{oscilaciones alrededor de}}$.

a)



$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\Omega} \wedge \hat{e}_r \quad \text{con} \quad \vec{\Omega} = \dot{\theta}\,\hat{e}_\varphi + \omega\,\hat{k}$$

$$\hat{k} = -\cos\theta\,\hat{e}_r + \sin\theta\,\hat{e}_\theta$$

$$\vec{\Omega} \wedge r\hat{e}_r = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\varphi \\ -\omega\cos\theta & \omega\sin\theta & \dot{\theta} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta - \omega \sin\theta\,\hat{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{v} = r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta - \omega r \sin\theta\,\hat{e}_\varphi$$

$$T = \frac{m}{2}\left(r^2\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta\, r^2\right) = \frac{mr^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta\right)$$

$$U = -mgr\cos\theta$$

$$\boxed{L = \frac{mr^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta\right) + mgr\cos\theta}$$

b)

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = mr^2\omega \sin\theta\cos\theta - mgr\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = mr^2\ddot{\theta} \quad \Longrightarrow \quad mr^2\ddot{\theta} = mr^2\omega\sin\theta\cos\theta - mg\cdot\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} = \omega^2\sin\theta\cos\theta - \frac{g}{r}\sin\theta}$$

Puedo interpretar $\ddot{\theta} = F(\theta) = -\dfrac{dV}{d\theta}$

Ecuaciones de Lagrange

* $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t) \qquad i = 1, \dots N$

* Desplazamiento virtual $\quad (t = cte)$

$$\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad \text{con } \delta q_j \text{ arbitrarios}$$

* $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{C}_i$

$\vec{F}_i^{(a)} \downarrow$ activas

$\vec{C}_i \to$ vínculos

* Vínculo <u>ideal</u> $\quad \sum_i \vec{C} \cdot \delta \vec{r}_i = 0$

* Newton $\quad \dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{C}$

* $$\boxed{\sum_i (\vec{F}_i^{(a)} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0}$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j Q_j \, \delta q_j$$

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right]$$

Si los q_j son independientes

$j = 1, \dots n$

$$\boxed{Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}}$$

Si $\vec{F}_i = -\nabla_i U \Rightarrow Q_j = -\dfrac{\partial U}{\partial q_j}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Defino $L = T - U$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}(T-U) = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, \dots n}$$

<u>Potencia</u> Dado un conjunto de fuerzas $\vec{F}_i$ que actúan sobre partículas $\vec{r}_i$ la potencia es.

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \left(\sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)$$

$$P = \sum_j \underbrace{\left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right)}_{Q_j} \dot{q}_j + \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Ejemplo: Probar que un rígido $P = \vec{R} \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\omega}$

donde O es un pto del rígido

<u>Potenciales generalizados</u> Si $U(q, \dot{q}, t)$

$\Rightarrow$ Definimos $Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right)$

Si podemos expresar la Q_j de esta forma $\Rightarrow$

El potencial puede incluirse en el Lagrangiano

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, \dots n$$

Maxwell $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ $\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

se definen $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$

$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$

Sea una particula de masa m y carga q

la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

es experimentado por la particula

Se puede definir $U = q\phi - q \vec{A} \cdot \vec{v}$

El lagrangiano de la particula en un $\vec{E}, \vec{B}$

$$L = T - q\phi + q \vec{A} \cdot \vec{v}$$